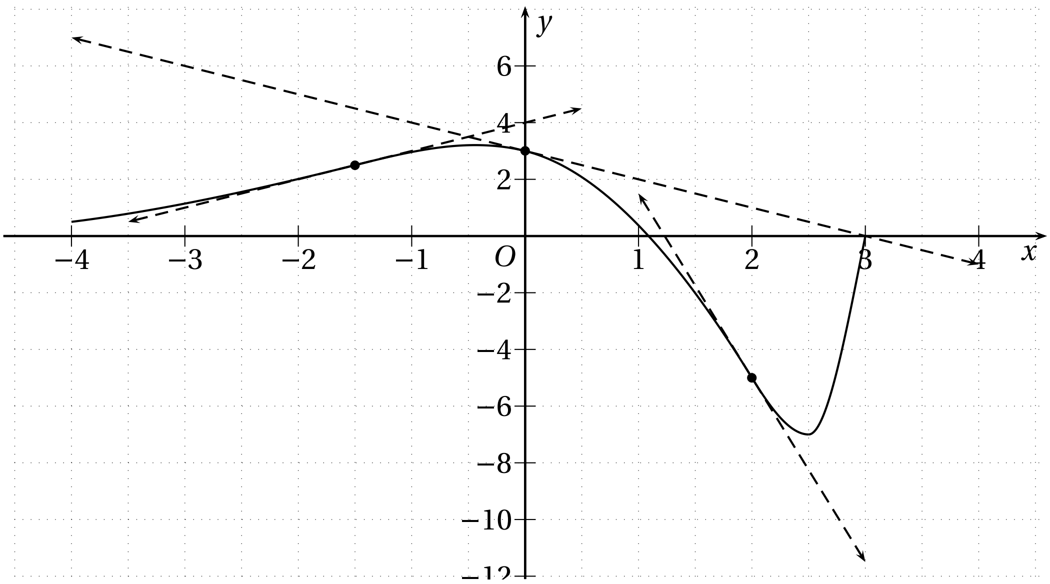
Devoir surveillé n° 3

Continuité – Convexité – Probabilités

Le devoir est noté sur 25. Le barème est provisoire.

EXERCICE 3.1 (5 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Il y a une seule réponse correcte parmi les trois propositions.
Cocher la réponse correcte pour chaque question, sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point, l'absence de réponse, les réponses multiples ou une réponse fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-4\,;3]$ ainsi que ses tangentes en certains points.



1. f est convexe sur l'intervalle :
   ☐ $[-1\,;1]$ ☐ $[-4\,;0]$ ☐ $[2\,;3]$

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet :
   ☐ un point d'inflexion ☐ deux points d'inflexion ☐ trois points d'inflexion

3. Sur l'intervalle $[-4\,;0]$, la fonction f' :
   ☐ est croissante ☐ est décroissante ☐ change de variation

4. $f'' \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle :
   ☐ $[-1\,;1]$ ☐ $[-4\,;0]$ ☐ $[2\,;3]$

5. Pour tout $x \in [-4\,;3]$:
   ☐ $f(x) \leqslant -x+3$ ☐ $f(x) \geqslant -x+3$ ☐ $f(x) \leqslant 0$

EXERCICE 3.2 (7,5 points)**.**
Un club de vol libre compte 150 membres.
Chacun des membres pratique un seul des sports suivants : le parapente, le deltaplane et le cerf-volant.
De plus on sait que :

- 42 % des membres ont 35 ans ou plus ;
- 20 % des membres pratiquent le deltaplane ;
- $\frac{1}{3}$ des moins de 35 ans pratiquent le cerf-volant ;
- $\frac{2}{5}$ des pratiquants de deltaplane ont moins de 35 ans ;
- le nombre de parapentistes est le double de celui des pratiquants du cerf-volant.

1. Compléter le tableau suivant :

	Parapente	Deltaplane	Cerf-volant	Total
Moins de 35 ans				
35 ans et plus				
Total				150

Les résultats des questions 2 et 3 seront donnés sous forme d'une fraction irréductible puis sous la forme de fraction décimale arrondie à 10^{-2} *près.*

2. On choisit au hasard un membre de ce club, calculer les probabilités des évènements suivants :

   A : « ce membre a moins de 35 ans » ;

   B : « ce membre ne pratique pas le parapente » ;

   C : « ce membre a moins de 35 ans et pratique le parapente » ;

   D : « ce membre a moins de 35 ans ou pratique le parapente ».

3. Quelle est la probabilité qu'un membre du club choisi au hasard parmi ceux qui pratiquent le parapente ait 35 ans ou plus ?

4. Le club fonctionne 300 jours dans l'année.
   On appelle X la variable aléatoire donnant dans l'année le nombre de jours où viennent des gens de moins de 35 ans.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(300\,;0,58)$.

   (b) Calculer $p(X=174)$ à 10^{-2} près.

   (c) Calculer $p(X>100)$ et interpréter le résultat.

   (d) Qu'est-ce qui est vrai : $p(X=0)=0$ ou $p(X=0)\approx 0$?

EXERCICE 3.3 (7,5 points)**.**
La fonction f est définie sur $[0;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$.

Partie A : Étude mathématique

1. Étudier les variations de f sur $[0;4]$ et dresser son tableau de variations en y indiquant les valeurs extrêmes.
2. (a) Déterminer $f(1)$.
   (b) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;4]$.
   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
3. Déduire des questions 1 et 2 le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
4. (a) Montrer que $f''(x) = -3x + 3$.
   (b) Étudier la convexité de f sur $[0;4]$.
   (c) En déduire que la courbe de f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

Partie B : Application économique

Pour une production comprise entre 0 et 40 objets, le bénéfice d'une entreprise, en centaine d'euros, en fonction de la quantité x d'objets vendus, en dizaine d'unités, est modélisé par $f(x)$.
Les réponses aux questions ci-dessous seront arrondies, si besoin, à l'unité pour les productions et à l'euro pour les bénéfices.

1. Déterminer pour quelle production l'entreprise est rentable.
2. Déterminer pour quelle production l'entreprise réalise un bénéfice maximum et déterminer ce bénéfice maximum.
3. Déterminer pour quelle production la croissance du bénéfice ralentit.

EXERCICE 3.4 (5 points)**.**
Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville.
Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.

On note u_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012+n$. On a donc $u_0 = 40000$.

On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,875 \times u_n + 1200$.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 9600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur de u_1 est
   ☐ 6 200 ☐ 35 000 ☐ 36 200 ☐ 42 000

2. La suite (v_n) est
   ☐ géométrique de raison $-12,5\,\%$
   ☐ géométrique de raison $-0,875$
   ☐ géométrique de raison 0,875
   ☐ arithmétique de raison -9600

3. La suite (u_n) a pour limite
   ☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 1 200 ☐ 9 600

4. On considère l'algorithme suivant :

```
INITIALISATION
 u PREND LA VALEUR 40 000
 n PREND LA VALEUR 0
TRAITEMENT
 TANT QUE u > 10 000
  n PREND LA VALEUR n+1
  u PREND LA VALEUR 0,875u + 1 200
 FIN TANT QUE
SORTIE
 AFFICHER n
```

   Cet algorithme permet d'obtenir :
   ☐ la valeur de u_{40000}
   ☐ toutes les valeurs de u_0 à u_n
   ☐ le plus petit rang n pour lequel on a $u_n \leqslant 10000$
   ☐ le nombre de termes inférieurs à 1 200

5. La valeur affichée par l'algorithme de la question 4 est :
   ☐ 33 ☐ 34 ☐ 9 600 ☐ 9 970,8