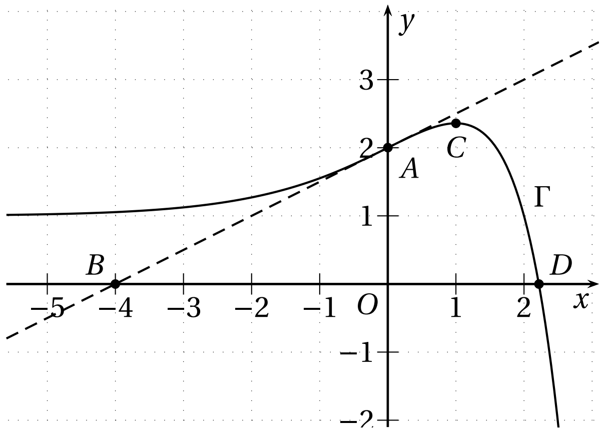
Devoir surveillé n° 2

Généralités sur les fonctions

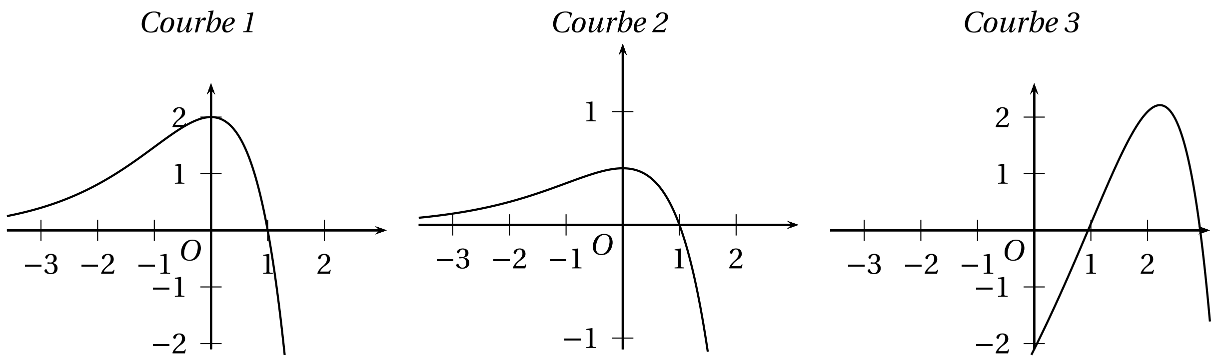
Les trois premiers exercices sont communs, le quatrième non.

EXERCICE 2.1 (4 points).
Cet exercice est commun à toutes les classes.

On a représenté ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $A(0;2)$ et $D(2,22;0)$ et la droite (AB), où $B(-4;0)$, est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. (a) Sans justifier, déterminer la valeur de $f(0)$.
   (b) En justifiant, déterminer les valeurs de $f'(0)$ et de $f'(1)$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à Γ en A.
2. Parmi les trois représentations graphiques de la figure ci-dessous, l'une représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.
3. Parmi les trois représentations graphiques de la figure ci-dessous, l'une représente une fonction h telle que $h' = f$. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.



EXERCICE 2.2 (7 points).
Cet exercice est commun à toutes les classes.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau des variations de f en indiquant les extremums locaux.
3. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de $\mathscr{T}$.

EXERCICE 2.3 (5 points).
Cet exercice est commun à toutes les classes.
La fonction f est définie sur $[0\,;6]$ par $f(x) = -4x^3 + 24x^2 - 21x - 9$.

Partie A : Étude mathématique

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$ et dresser son tableau de variations.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
   (b) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3{,}5\,;6]$.
   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (d) Déduire des deux questions précédentes le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Application économique

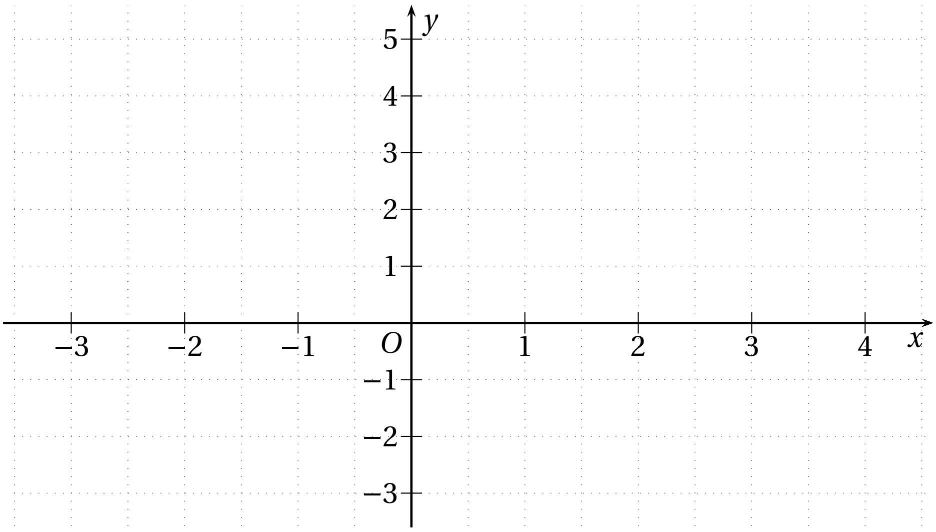
Pour une production comprise entre 0 et 600 objets, le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, en fonction de la quantité x d'objets vendus, en centaines d'unités, est modélisé par $f(x)$.
Les réponses aux questions ci-dessous seront arrondies, si besoin, à l'unité pour les productions et à l'euro pour les bénéfices.

1. Déterminer pour quelle production l'entreprise est rentable.
2. Déterminer pour quelle production l'entreprise réalise un bénéfice maximum et déterminer ce bénéfice maximum.

EXERCICE 2.4 (4 points).
Cet exercice est pour la classe de TL1ES.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < 1 \\ mx + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

1. Dans le repère de la figure ci-dessous tracer, respectivement, en bleu et en vert les représentations graphiques de f pour $m = 1$ et $m = -2$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.
3. Déterminer m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer alors sa représentation en rouge.



EXERCICE 2.4 (4 points).
Cet exercice est pour la classe de TES4.
Les deux questions sont indépendantes. Détailler les calculs avec les matrices.

1. Trois librairies ont en stock trois œuvres philosophiques étudiées au lycée numérotées **1**, **2** et **3**. Leur stock fin mai est indiqué dans le tableau ci-dessous :

	1	**2**	**3**
Librairie 1	10	12	17
Librairie 2	2	1	7
Librairie 3	3	9	6

Les tableaux ci-dessous indiquent les réapprovisionnements du 15 juin et les ventes jusqu'au 15 septembre :

	1	**2**	**3**
Librairie 1	170	140	220
Librairie 2	60	50	60
Librairie 3	20	30	20

	1	**2**	**3**
Librairie 1	175	151	192
Librairie 2	57	50	65
Librairie 3	12	38	26

Résumer ces trois tableaux sous formes de matrices A, B et C puis utiliser le calcul matriciel pour faire l'inventaire des stocks de chaque librairie au 15 septembre.

2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inverses l'une de l'autre ?
Justifier la réponse par un calcul.

EXERCICE 2.4 (4 points)**.**
Cet exercice est pour la classe de TES1.
Cet exercice est un QCM. Il y a une seule réponse correcte parmi les trois propositions.
Cocher le bon résultat pour chaque algorithme, sachant qu'une réponse exacte rapporte 1 point, l'absence de réponse, les réponses multiples ou une réponse fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.

	Algorithme	Résultats proposés		

1.	`x PREND LA VALEUR 3`
	`POUR n ALLANT DE 1 A 4`
	` x PREND LA VALEUR 2x`
	`FIN POUR`
	`AFFICHER x`
		☐ 6	☐ 24	☐ 48

2.	`x PREND LA VALEUR 2`
	`TANT QUE x < 1000`
	` x PREND LA VALEUR 3x`
	`FIN TANT QUE`
	`AFFICHER x`
		☐ 1458	☐ 4374	☐ 486

3.	`x PREND LA VALEUR 1`
	`P PREND LA VALEUR 1`
	`TANT QUE P < 10`
	` x PREND LA VALEUR x+3`
	` P PREND LA VALEUR P fois x`
	`FIN TANT QUE`
	`AFFICHER P`
		☐ 28	☐ 100	☐ 280

4.	`u PREND LA VALEUR 1`
	`S PREND LA VALEUR 1`
	`POUR n ALLANT DE 1 A 3`
	` u PREND LA VALEUR 2u`
	` S PREND LA VALEUR S+u`
	`FIN POUR`
	`AFFICHER S`
		☐ 25	☐ 20	☐ 15