BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2019

Épreuve :
MATHÉMATIQUES

Série
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES, toutes spécialités
LITTÉRAIRE, spécialité : Mathématiques

Classes
TERMINALES ES
TERMINALE L1 (spécialité : Mathématiques)

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le barème n'est qu'indicatif.

Le sujet comporte 6 pages.

EXERCICE 1 (5 points).
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. On considère l'algorithme ci-contre :

   On affecte 3 à la variable N.

   Que contient la variable S, arrondie au dixième, à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

$v \leftarrow 9$
$S \leftarrow 9$
Pour i allant de 1 à N
$\quad v \leftarrow 0,75 \times v$
$\quad S \leftarrow S + v$
Fin Pour

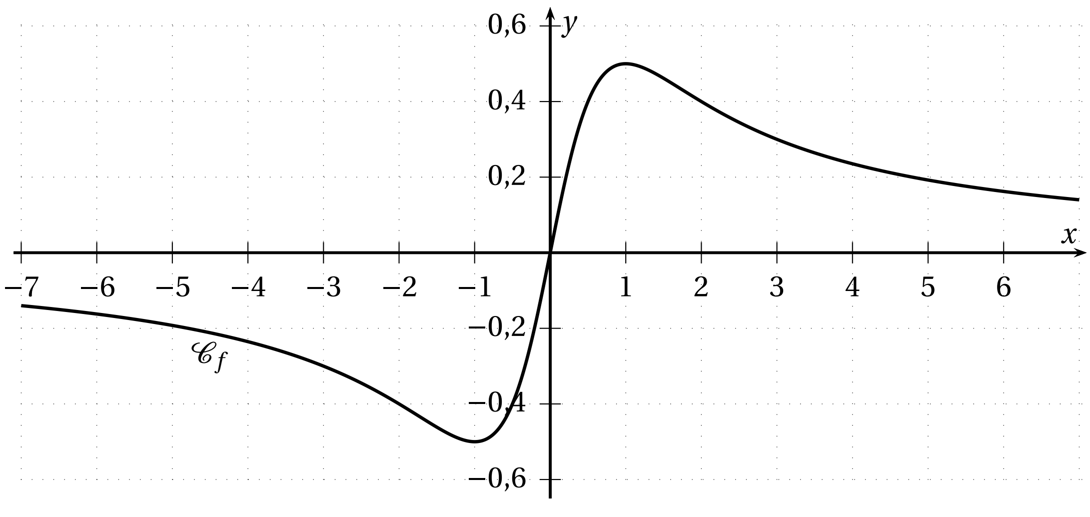
   (a) 24,6 (b) -25 (c) 27 (d) 20,8

2. Soit a un réel, l'expression $\dfrac{2\mathrm{e}^{a-1}}{\left(\mathrm{e}^{a}\right)^2}$ est égale à :

   (a) 1 (b) $2\mathrm{e}^{3a-1}$ (c) e^{-2} (d) $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{a+1}}$

   Pour les questions 3, 4 et 5, on considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.

   On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f'.



3. Le nombre de solutions dans $[-7 ; 7]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est :

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. Une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = -0,3$ sur l'intervalle $[-1 ; 6]$ est :

   (a) -3 (b) $-0,3$ (c) 0,3 (d) 3

5. Le nombre de points d'inflexion dans $[-7 ; 7]$ de $\mathscr{C}_f$ est :

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

EXERCICE 2 (5 points).
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L
Dans tout cet exercice les résultats seront arrondis au centième si nécessaire
Les parties A et B sont indépendantes

Partie A
Victor a téléchargé un jeu sur son téléphone. Le but de ce jeu est d'affronter des obstacles à l'aide de personnages qui peuvent être de trois types : « Terre », « Air » ou « Feu ».
Au début de chaque partie, Victor obtient de façon aléatoire un personnage d'un des trois types et peut, en cours de partie, conserver ce personnage ou changer une seule fois de type de personnage.
Le jeu a été programmé de telle sorte que :

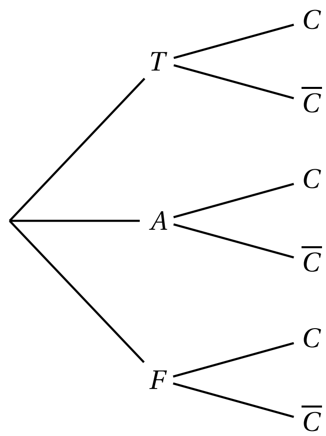
- la probabilité que la partie débute avec un personnage de type « Terre » est 0,3 ;
- la probabilité que la partie débute avec un personnage de type « Air » est 0,5 ;
- si la partie débute avec un personnage de type « Terre », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,5 ;
- si la partie débute avec un personnage de type « Air », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,4 ;
- si la partie débute avec un personnage de type « Feu », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,9.

On note les évènements suivants :

- T : la partie débute avec un personnage de type « Terre » ;
- A : la partie débute avec un personnage de type « Air » ;
- F : la partie débute avec un personnage de type « Feu » ;
- C : Victor conserve le même personnage tout au long de la partie.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.
2. Calculer la probabilité que Victor obtienne et conserve un personnage de type « Air ».
3. Justifier que la probabilité que Victor conserve le personnage obtenu en début de partie est 0,53.
4. On considère une partie au cours de laquelle Victor a conservé le personnage obtenu en début de partie.

   Quelle est la probabilité que ce soit un personnage de type « Air » ?



Partie B
On considère 10 parties jouées par Victor, prises indépendamment les unes des autres. On rappelle que la probabilité que Victor obtienne un personnage de type « Terre » est 0,3.
Y désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de personnages de type « Terre » obtenus au début de ses 10 parties.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu exactement 3 personnages de type « Terre » au début de ses 10 parties.
3. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu au moins une fois un personnage de type « Terre » au début de ses 10 parties.

EXERCICE 2 (5 points).
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire en botanique étudie l'évolution d'une espèce végétale en fonction du temps.
Cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus.
Au bout de 2 semaines, l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.
Au bout de 3 semaines, l'espèce végétale prolifère et s'élève à 30,5 centaines d'individus.
Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.
On modélise cette évolution par une fonction polynomiale f donnant le nombre d'individus de l'espèce, exprimé en centaine, en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaine.
Ainsi $f(2) = 18$; $f(3) = 30,5$ et $f(10) = 90$.
On admet que $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d, sont des réels.

1. Justifier que $d = 2$.
2. Montrer que a, b et c sont solutions du système :

$$(\mathscr{S}) : \left\{\begin{array}{lcl} 8a+4b+2c & = & 16 \\ 27a+9b+3c & = & 28,5 \\ 1\,000a+100b+10c & = & 88 \end{array}\right.$$

3. On considère les matrices :

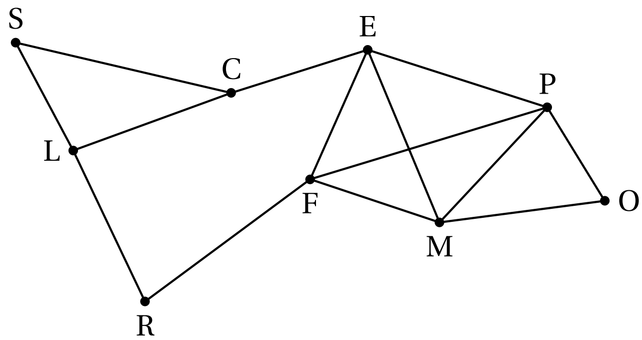
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \\ 1\,000 & 100 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   Prouver que le système $(\mathscr{S})$ peut s'écrire sous la forme $AX = B$, avec B à déterminer.

4. Résoudre le système et conclure.
5. En supposant que l'évolution suit, sur l'intervalle $[0 ; 13]$, le modèle décrit par la fonction f, avec $f(x) = -0,2x^3 + 2,5x^2 + 3,8x + 2$, déterminer, par le cacul, au bout de combien de temps la quantité de l'espèce étudiée sera maximale (arrondir à la semaine près).

Partie B

Le laboratoire en botanique possède un parc d'étude dans lequel est observée l'évolution de différentes espèces d'arbres.
Les agents chargés du nettoyage circulent dans le parc depuis le local technique (L) jusqu'aux différentes parcelles plantées d'arbres : C, E, F, M, O, P, R et S.
Les sommets du graphe ci-contre représentent les différentes parcelles, et les arêtes marquent les allées permettant de se déplacer dans le parc. Les étiquettes rapportent la distance en mètre entre les parcelles.



1. Répondre aux questions suivantes en justifiant brièvement :
   (a) Ce graphe est-il complet ?
   (b) Ce graphe est-il connexe ?
2. (a) Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et en y revenant? Si oui, donner un tel parcours.
   (b) Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et sans nécessairement y revenir ? Si oui, donner un tel parcours.

EXERCICE 3 (5 points).
Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.
   On précisera la valeur de v_0.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n.$$
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$\quad n \leftarrow n+1$
ligne 5	$\quad u \leftarrow 0{,}8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

   (a) Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.
   (b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.

   En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

   - d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
   - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

   (a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.
   (b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.
   (c) Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?
   Argumenter la réponse.

EXERCICE 4 (5 points).
Commun à tous les candidats

f est la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

   Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. (a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ en le justifiant.

   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans $[0\,;\,12]$.

   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. (a) Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

   (b) À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ?

   Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.

   Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?