

## Devoir surveillé n° 5

### Fonction exponentielle

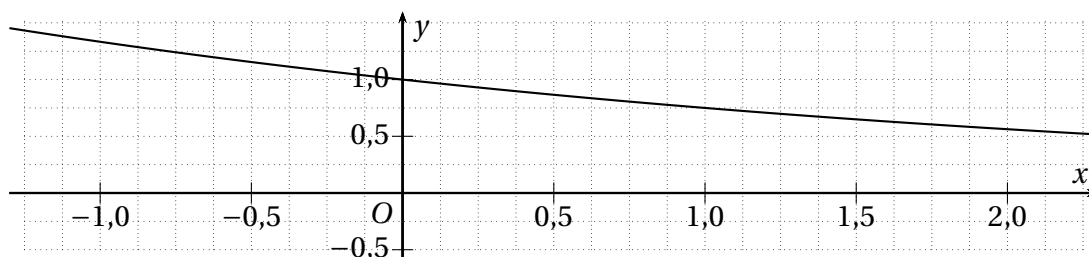
**EXERCICE 5.1** (8 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.

*Aucune justification n'est demandée.*

1. On donne ci-dessous une courbe d'équation  $y = q^x$  :



Alors on peut dire que :

- $q \approx 1,33$ 
  $q \approx 0,87$ 
  $q \approx 0,75$
2. Pour tous réels  $a$  et  $b$ , le nombre réel  $\frac{e^a}{e^b}$  est égal à :
- $e^{\left(\frac{a}{b}\right)}$ 
  $e^{(a-b)}$ 
  $e^a - e^b$
3. Pour tout réel  $a$  non nul, le nombre réel  $e^{-\frac{1}{a}}$  est égal à :
- $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ 
  $\frac{1}{e^a}$ 
  $e^a$
4. Pour tout réel  $a$ , le nombre réel  $e^{\frac{a}{2}}$  est égal à :
- $\sqrt{e^a}$ 
  $\frac{e^a}{e^2}$ 
  $e^{\sqrt{a}}$
5. Parmi les fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}$ , la seule convexe est :
- $f(x) = e^{-x^2}$ 
  $f(x) = 3x^2 + x - 7$ 
  $f(x) = -e^x$
6. Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1,4^x$ , alors :
- $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ 
  $f(0) = 1,4$ 
  $f(1) \times f(-4) = f(-3)$
7. Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{1-x}$ , alors :
- $f'(x) = e^{1-x}$ 
  $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$ 
  $f'(x) = (1+x)e^{1-x}$
8. Si  $f$  est définie par  $f(x) = e^{-x}$ , alors, sur  $\mathbb{R}$  :
- $f'(x) = e^{-x}$ 
  $f$  n'est pas monotone
  $f$  est décroissante

**EXERCICE 5.2** (4 points).

*Les questions sont indépendantes. Les réponses seront arrondies au centième.*

1. Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 5 % pendant 10 ans. À quel taux annuel faudrait-il le placer pour qu'il rapporte la même somme en 5 ans et demi ?

2. Le cours d'une action a baissé de 25 % entre le 1<sup>er</sup> janvier et le 1<sup>er</sup> juin. Déterminer la baisse mensuelle moyenne.

**EXERCICE 5.3** (8 points).

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 10]$  par

$$f(x) = x + e^{-x+1}$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x + 1)$
	// Interprète $f$ // Succès lors de la compilation $f$
	$x \mapsto x + \exp(-x + 1)$
2	derive ( $f(x)$ )
	$-\exp(-x + 1) + 1$
3	solve ( $-\exp(-x + 1) + 1 > 0$ )
	$[x > 1]$
4	derive ( $-\exp(-x + 1) + 1$ )
	$\exp(-x + 1)$

- Étude des variations de la fonction  $f$ 
  - En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variation.
  - En déduire que la fonction  $f$  admet un minimum dont on précisera la valeur.
- Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

**Partie B**

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.

Le coût de revient est modélisé par la fonction  $f$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et  $f(x)$  le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

- Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum?
- Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour  $x$  centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
  - Justifier que le montant obtenu par la vente de  $x$  centaines d'objets est  $1,2x$  milliers d'euros.
  - Montrer que la marge brute pour  $x$  centaines d'objets, notée  $g(x)$ , en milliers d'euros, est donnée par :  $g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$ .
  - Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 10]$ .
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .
  - Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,01.
- En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.