Devoir surveillé n° 3

Suites – Continuité – Convexité

EXERCICE 3.1 (7,5 points)**.**
Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.
On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi.
Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018.

   Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

   (a) Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.
   Préciser son terme initial.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

   (a) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   (b) L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ? Justifier la réponse.

4. Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

```
N ← 0
U ← 605
Tant que .................... faire
        U ← ...................
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

   (a) Recopier et compléter l'algorithme.

   (b) À la fin de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?

   (c) En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

EXERCICE 3.2 (7,5 points)**.**
La fonction f est définie sur $[0;4]$ par $f(x) = -x^3 + 5{,}25x^2 - 4{,}5x - 4$.

Partie A : Étude mathématique

1. Étudier les variations de f sur $[0;4]$ et dresser son tableau de variations en y indiquant les valeurs extrêmes.
2. (a) Déterminer $f(2)$.
   (b) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3;4]$.
   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
3. Déduire des questions 1 et 2 le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
4. (a) Montrer que $f''(x) = -6x + 10{,}5$.
   (b) Étudier la convexité de f sur $[0;4]$.
   (c) En déduire que la courbe de f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

Partie B : Application économique

Pour une production comprise entre 0 et 40 objets, le bénéfice d'une entreprise, en centaine d'euros, en fonction de la quantité x d'objets vendus, en dizaine d'unités, est modélisé par $f(x)$.
Les réponses aux questions ci-dessous seront arrondies, si besoin, à l'unité pour les productions et à l'euro pour les bénéfices.

1. Déterminer pour quelle production l'entreprise est rentable.
2. Déterminer pour quelle production l'entreprise réalise un bénéfice maximum et déterminer ce bénéfice maximum.
3. Déterminer pour quelle production la croissance du bénéfice ralentit.