Chapitre 3

Suites

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1.
Le tableau 3.1, de la présente page, donne, en million, l'effectif de la population africaine depuis 1950.

1. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.
2. Un statisticien propose de modéliser la population africaine tous les dix ans par une suite géométrique de raison $q = 1{,}28$. Comment justifier sa démarche ?
3. Pour tout entier n, on note p_n la population africaine estimée par ce modèle, en million, l'année $1950 + 10n$. Ainsi $p_0 = 227{,}3$.
   (a) Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles. Le modèle serait-il plus proche de la réalité avec $q = 1{,}29$?
   (b) Représenter la suite sur un graphique. Si ce modèle reste valable dans le futur, conjecturer vers quelle valeur tendra la population africaine.
   (c) Estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 2 milliards.
   (d) On donne ci-dessous un algorithme.
   Le programmer (sur Algobox ou sur calculatrice) et l'utiliser pour déterminer quand la population dépassera 3 milliards.
   Proposer un autre algorithme, basé

TABLE 3.1: Tableau de l'activité 3.1

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

sur l'instructions « Tant que » qui rendrait cette recherche plus efficace.

```
Entrée(s)
   n
Initialisation
   u ← 227,3
Traitement
   Pour k allant de 1 à n
      u ← u × 1,28
      Afficher k
      Afficher u
   Fin pour
```

ACTIVITÉ 3.2.
Une usine fabrique de la peinture spéciale pour carrosserie.
À la fin du premier jour, la production est de 1 000 L. Ensuite, elle diminue chaque jour de 2 %.

1. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer vers quelle valeur va tendre la production journalière de peinture.
2. En vous inspirant de l'algorithme de l'activité 3.1, page précédente, écrire un algorithme permettant d'obtenir au bout de combien de jours la production sera inférieure à un seuil donné et l'utiliser pour déterminer au bout de combien de jours la production sera inférieure à 10 L.

ACTIVITÉ 3.3.
On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.
   (a) Calculer u_1, u_2, …, u_{10}.
   (b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
   (c) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (d) Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{64}.
2. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Entrée(s)
   n
Initialisation
   u ← 1
   s ← 0
Traitement
   Pour k allant de 1 à n
      u ← u × 2
      s ← s + u
   Fin pour
Sortie(s)
   Afficher s
```

   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice.
   (c) Utiliser cet algorithme pour obtenir S, le nombre total de grains sur l'échiquier.
3. On note S le nombre total de grains sur l'échiquier. Ainsi $S = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{64}$.
   (a) Exprimer $2S$ puis $2S - S$.
   (b) En déduire S.
4. Sachant qu'un grain de blé pèse, en moyenne, 5×10^{-2} gramme et qu'un mètre cube de blé pèse, en moyenne, une tonne, serait la hauteur d'un grenier parallélépipèdique de base carrée de côté 200 m qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?
   Le Roi avait-il raison de sourire ?

ACTIVITÉ 3.4.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients.
Chaque année, sa clientèle est composée de 50 % des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer vers quelle valeur semble tendre u_n lorsque n devient grand.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de la suite (u_n).
   Que peut on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?

3.2 Suites géométriques – Rappels

Étant des rappels, les propriétés ne seront pas (re)démontrées et les exemples seront limités.

Définition 3.1. On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.

   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.

   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Propriété 3.1. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a : $u_n = q^{n-p} u_p$*
Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = q^n u_0$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Propriété 3.2. *La suite de terme général $u_n = q^n$ est :*

- *strictement croissante si $q > 1$*
- *strictement décroissante si $0 < q < 1$*
- *ni croissante ni décroissante si $q < 0$*

3.3 Limite d'une suite géométrique du type q^n où $q > 0$

Étudier la limite d'une suite (u_n) c'est chercher ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient grand (tend vers l'infini) ; plus précisément :

- Les nombres u_n finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

En Terminale ES on ne s'intéressera qu'aux suites du type $u_n = q^n$ où $q > 0$ et on a :

Propriété 3.3. *Soit (u_n) une suite géométrique du type $u_n = q^n$.*

- *Si* $0 < q < 1$ *alors* $\lim(q^n) = 0$
- *Si* $q = 1$ *alors* $\lim(q^n) = 1$
- *Si* $q > 1$ *alors* $\lim(q^n) = +\infty$

On l'admettra.

3.4 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4. *Soit $q \neq 1$ et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.*

Preuve. La démonstration sera faite en classe. ♢

Propriété 3.5. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n un entier naturel. Alors :*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve. La démonstration sera faite en classe. ♢

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

3.5 Exercices

EXERCICE 3.1.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990 + n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Répondre à la question.

EXERCICE 3.2.
On dit qu'un capital produit :

- *des **intérêts simples** si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital ;*
- *des **intérêts composés** si à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.*

Alexandre dispose de 4 000 € qu'il souhaite placer à la banque. Celle-ci lui propose deux placements :

- un placement A à intérêts simples à un taux de 5 % par an ;
- un placement B à intérêts composés à un taux de 4 % par an.

Question : Alexandre a entendu dire que les placements à intérêts composés étaient généralement plus intéressants que les placements à intérêts simples. Cette rumeur est-elle fondée ?

On appelle A_n le montant du capital obtenu après n années avec le placement A et B_n le montant du capital obtenu après n années avec le placement B.

1. (a) Déterminer A_0, A_1, A_2 et A_3.
   (b) Montrer que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer A_n en fonction de n.
2. (a) Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.
   (b) Montrer que (B_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer B_n en fonction de n.
3. (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de A_n et B_n jusqu'à $n = 20$.
   (b) Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 3.3.
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36$^{\text{è}}$ mois.
3. Répondre à la question.

EXERCICE 3.4.
On se place dans la situation de l'activité 3.2, page 26.
En fait l'usine en question stocke sa production au fur et à mesure pour honorer une commande de peinture.
Question : L'usine pourra-t-elle honorer une commande de 15 000 L et, si oui, en combien de jours ? Et de 60 000 L ?

1. Que fait l'algorithme ci-dessous ?
2. Modifier cet algorithme afin qu'il indique si un seuil peut être atteint et, si oui, en combien de jours puis utiliser l'algorithme modifié pour répondre à la question.
3. Par le calcul, déterminer la limite de la suite (S_n) où S_n est la quantité de peinture stockée au bout de n jours (avec n entier naturel).
   Que peut-on alors conseiller aux dirigeants de l'usine ?

Entrée(s)
  n
Initialisation
  $u \leftarrow 1\,000$
  $s \leftarrow 1\,000$
Traitement
  Pour k allant de 1 à n
    $u \leftarrow u \times 0{,}98$
    $s \leftarrow s + u$
  Fin pour
Sortie(s)
  Afficher s

EXERCICE 3.5.
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Question : Comment va évoluer sur le long terme le nombre d'employés dans cette entreprise ?

Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005 + n)$
.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3
2. (a) Montrer que $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) En déduire u_n en fonction de n.
   (e) En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1er janvier de l'année 2027
   (f) En déduire la limite de la suite (u_n). Comment l'interpréter ?

EXERCICE 3.6.
Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1 000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 € le premier d'un mois et ensuite 50 € le 1er de chaque mois.
Question : Quel sera le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection ?

On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux c_1, c_2 et c_3 du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique.
   (b) En déduire u_n puis c_n en fonction de n.
4. Répondre à la question.

EXERCICE 3.7.
Monsieur X désire financer un voyage dont le coût est de 6 000€.
Pour ce faire, il a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.

Question : En quelle année aura-t-il assez d'argent pour financer son voyage ?

On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1{,}035)^n - 20000$.
3. Répondre à la question.