Chapitre 1

Rappels sur les fonctions
Continuité

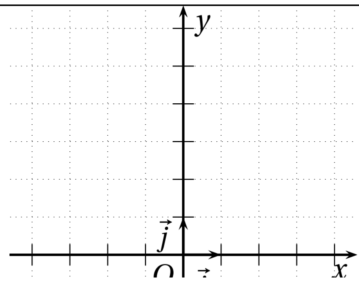
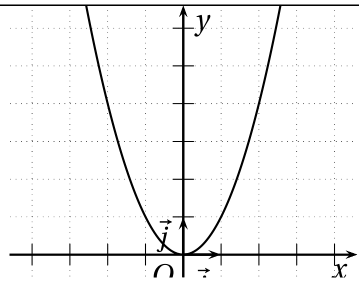
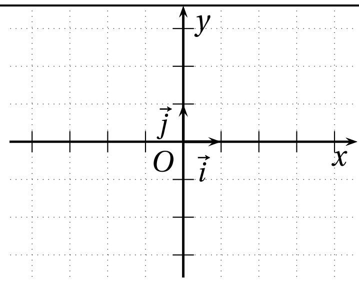
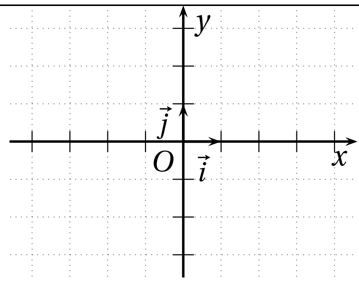
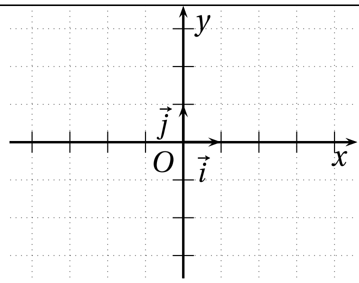
Sommaire

1.1 Rappels sur les fonctions

Les rappels de ce chapitre seront traités sous forme d'exercice.

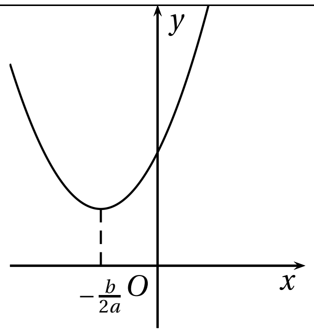
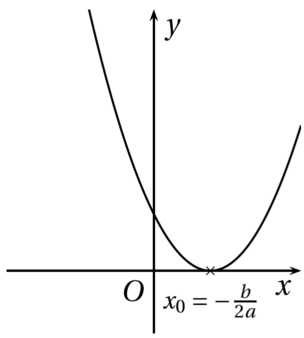
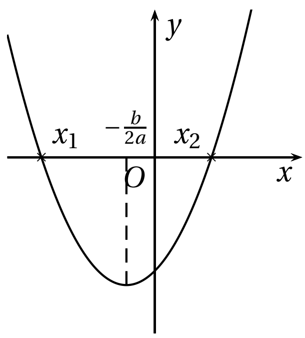
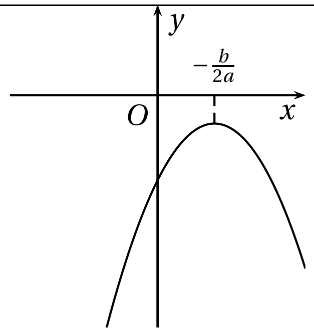
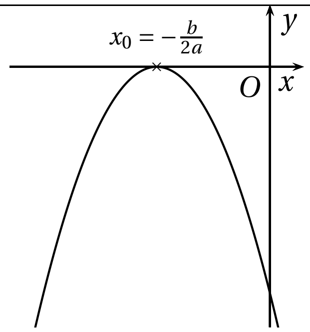
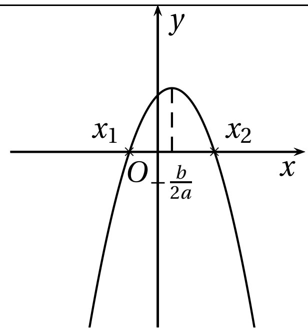
1.1.1 Fonctions de référence

EXERCICE 1.1.
Compléter le tableau ci-dessoussur le modèle de la deuxième ligne.

Fonction Définie sur	Variations	Allure de la courbe représentative
Affine $f(x) = \dots\dots\dots$ $D_f = \dots\dots\dots$		
Carré $f(x) = x^2$ $D_f = \mathbb{R}$	$\begin{array}{\|c\|ccccc\|} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ f(x)=x^2 & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & 0 & & \end{array}$	 Parabole
Cube $f(x) = \dots\dots\dots$ $D_f = \dots\dots\dots$		
Inverse $f(x) = \dots\dots\dots$ $D_f = \dots\dots\dots$		
Racine carrée $f(x) = \dots\dots\dots$ $D_f = \dots\dots\dots$		

1.1.2 Fonction trinôme

Exercice 1.2.
Compléter le tableau ci-dessous.

	$\Delta = b^2 - 4ac$		
	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	$ax^2+bx+c=0$ a ...... solution(s) dans $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c=0$ a ...... solution(s) dans $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c=0$ a ...... solution(s) dans $\mathbb{R}$
	ax^2+bx+c a ...... racine(s)	ax^2+bx+c ...... racine(s)	ax^2+bx+c ...... racine(s)
	Factorisation :	Factorisation :	Factorisation : ....
Si $a>0$	$\begin{array}{c\|ccccc\|} x & -\infty & & -\dfrac{b}{2a} & & +\infty \\ ax^2+bx+c & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$		
			
	Signe :	Signe :	Signe : ....
Si $a<0$	$\begin{array}{c\|ccccc\|} x & -\infty & & -\dfrac{b}{2a} & & +\infty \\ ax^2+bx+c & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$		
			
	Signe :	Signe :	Signe : ....

1.2 Continuité

1.2.1 Activités

ACTIVITÉ 1.1.
Voici quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2$;
- $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.
- $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$;
- $l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$;

Représenter graphiquement ces fonctions et commenter les courbes obtenues.

ACTIVITÉ 1.2.
La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe l'entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note E cette fonction.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

x	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	$-0,01$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	$0,99$	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	$1,99$	2
$E(x)$																

2. Représenter graphiquement E.
   Que constate-t-on ?

1.2.2 Bilan et compléments

En terminale ES on ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est continue et l'appréhension graphique de la notion est suffisante. Ainsi une fonction est dite continue si sa courbe représentative ne présente aucun saut, aucun trou; en d'autres termes si on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

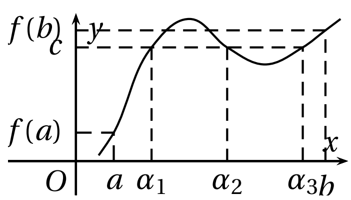
N'ayant pas la définition mathématique rigoureuse de la continuité, les propriétés ne pourront être qu'admises.

Propriété 1.1. *Les fonctions affines, carrée, cube, racine, polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
Les fonctions inverses et rationnelles sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.

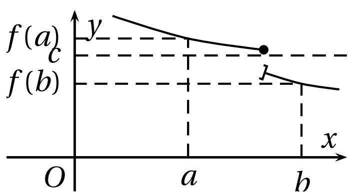
Valeurs intermédiaires

Propriété 1.2 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a;b]$.*

Exemples 1.1.



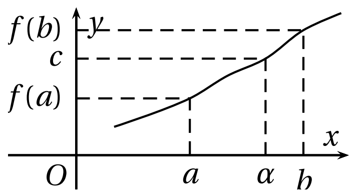
f est continue sur l'intervalle $[a;b]$. L'équation $f(x) = c$ a au moins une solution; elle peut en avoir plusieurs.



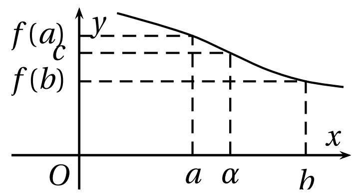
f n'est pas continue sur l'intervalle $[a;b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

Théorème 1.3 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

Exemples 1.2.



f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.

Tableau de variation

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifient que sur l'intervalle considéré la fonction est soit *continue **et** strictement croissante*, soit *continue **et** strictement décroissante*. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur cet intervalle.

1.3 Exercices et problème

EXERCICE 1.3.

Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) tracer la courbe représentant le bénéfice ; quelle est sa nature ?
   (b) déterminer graphiquement puis par le calcul la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
   (c) déterminer graphiquement puis par le calcul la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

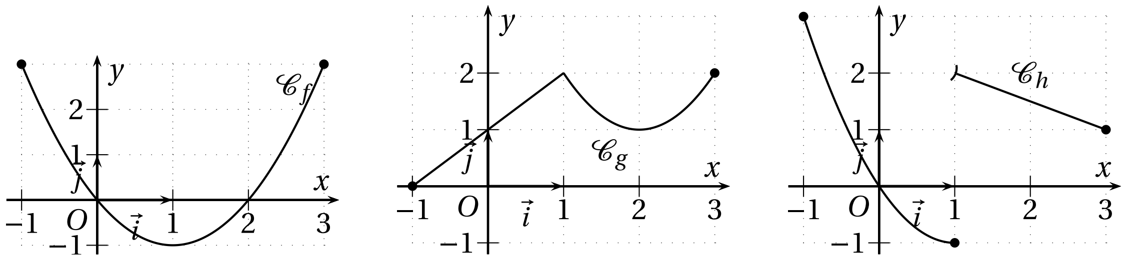
EXERCICE 1.4.

Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet pour un prix inférieur à 25 €. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.

1. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1 848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
2. En déduire graphiquement puis par le calcul pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
3. Déterminer graphiquement puis par le calcul le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

EXERCICE 1.5.
Les fonctions f, g et h représentées sur la figure 1.1 de la présente page par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, sont définies sur $[-1\,;3]$.

FIGURE 1.1: Trois courbes



1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1\,;3]$?
2. Si la fonction n'est pas continue sur $[-1\,;3]$, donner les intervalles sur lesquels elle est continue.

EXERCICE 1.6.
f est la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2\,;1[\\ x+p & \text{si } x \in [1\,;5] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour $p=2$, pour $p=1$ et pour $p=-2$.
2. f est-elle continue sur $[-2\,;1[$? Sur $[1\,;5]$?
3. Comment choisir p pour que f soit continue sur $[-2\,;5]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.7.
f est la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2+bx+3 & \text{si } x \in [-2\,;2] \\ 2x+1 & \text{si } x \in]2\,;3] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour $b=1$ et pour $b=-2$.
2. Comment choisir b pour que f soit continue sur $[-2\,;3]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.8.
f est la fonction définie sur $[-3\,;2]$ par : $f(x) = \begin{cases} ax^2+x+2 & \text{si } x \in [-3\,;-1[\\ x+1 & \text{si } x \in [-1\,;2] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour $a=1$, pour $a=0$ et pour $a=-2$.
2. Comment choisir a pour que f soit continue sur $[-3\,;2]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.9 (Calculatrice – Algorithmique).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 5$.

Partie A.

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer $f(-2)$ et $f(-1)$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2\,;-1]$

Partie B. Tableau de valeur à la calculatrice.

1. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant :

x	-2	$-1{,}9$	$-1{,}8$	$-1{,}7$	$-1{,}6$	$-1{,}5$	$-1{,}4$	$-1{,}3$	$-1{,}2$	$-1{,}1$	-1
$f(x)$											

2. En déduire un encadrement d'amplitude 0,1 de α.
3. Modifier, sur votre calculatrice, le tableau de valeur afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de α.
4. Modifier, sur votre calculatrice, le tableau de valeur afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,001 de α.
   En déduire un arrondi de α à 10^{-2}.

Partie C. Algorithmique. On donne l'algorithme ci-dessous :

```
ENTREES
   fonction : f
   valeur de depart : a
   taille de l'encadrement : e
   valeur cherchee : c
INITIALISATION
   b PREND LA VALEUR a+e
   p PREND LA VALEUR f(a)
   q PREND LA VALEUR f(b)
TRAITEMENT
   TANT QUE p<c ET q<c FAIRE
     a PREND LA VALEUR a+e
     b PREND LA VALEUR b+e
     p PREND LA VALEUR f(a)
     q PREND LA VALEUR f(b)
   FIN TANT QUE
SORTIES
   AFFICHER "alpha est compris entre"
   AFFICHER ...
   AFFICHER "et"
   AFFICHER ...
```

1. Remplir les cases vides du tableau suivant en faisant tourner l'algorithme à la main avec la fonction $f(x) = x^3 + x + 5$ avec comme valeur de départ $a = -2$, comme taille d'encadrement $e = 10^{-2}$ et comme valeur cherchée $c = 0$.

Numéro de passage sur l'instruction TANT QUE	a	b	p	q	$p < c$ ET $q < c$
1	-2				
2					
3					
4					
5					

2. Quelle(s) entrée(s) modifier pour retrouver les résultats de la partie B ?

3. Quelle(s) ligne(s) modifier pour que cet algorithme permette d'obtenir un encadrement de la valeur où la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ vaut 2,7 ?

PROBLÈME 1.1.
Le tableau suivant donne les 5 premières tranches du barème de l'impôt sur les grandes fortunes (ISF) pour l'année 2011, en fonction du montant du patrimoine taxable de 2010.

Tranche du revenu	x : montant du patrimoine taxable, en milliers d'euros	Taux d'imposition 2011
Tranche 1	$x \leqslant 800$	0 %
Tranche 2	$800 < x \leqslant 1310$	0,55 %
Tranche 3	$1310 < x \leqslant 2570$	0,75 %
Tranche 4	$2570 < x \leqslant 4040$	1,00 %
Tranche 5	$4040 < x \leqslant 7710$	1,30 %

Exemple : Si $x = 1\,400$ alors :

- les 800 premiers milliers d'euros, situés dans la première tranche, sont taxés à 0 % ;
- les milliers d'euros (1 310 – 800) situés dans la deuxième tranche sont taxés à 0,55 % ;
- les milliers d'euros (1 400 – 1 310) situés dans la troisième tranche sont taxés à 0,75 %.

Ainsi le montant I de l'impôt est donné par $I = 800 \times \frac{0}{100} + (1\,310 - 800) \times \frac{0{,}55}{100} + (1\,400 - 1\,310) \times \frac{0{,}75}{100} = 3{,}480$.
On a donc : si le patrimoine est de 1,4 millions d'euros, alors le montant de l'ISF est de 3 480 €.

1. Soit x le montant du patrimoine en milliers d'euros. Exprimer, pour chaque tranche d'imposition, le montant $f(x)$, en milliers d'euros, de l'impôt à payer en 2011.

2. Représenter f dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour 1 000 milliers d'euros sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 10 milliers d'euros sur l'axe des ordonnées.

3. Que remarque-t-on à chaque changement de tranche ?

4. La fonction f est-elle continue ?