Chapitre 1

Graphes : premières notions

Sommaire

1.1 Quelques problèmes

PROBLÈME 1.1 (Matches de football)**.**
Une ligue de football comporte cinq équipes.

- Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?
- Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

PROBLÈME 1.2 (Segments)**.**
Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

PROBLÈME 1.3 (Poignées de main)**.**
M. et Mme EULER assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance : certains participants à la réunion se saluent en se serrant la main.

- Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main.
- Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.
- M. EULER constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

1.2 Premières notions

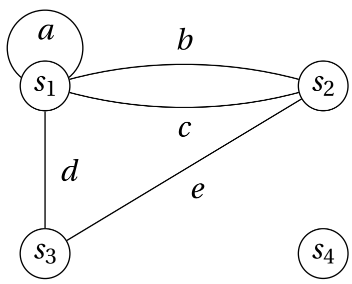
De très nombreux problèmes pratiques peuvent être ainsi schématisés à l'aide d'un graphe ; en simplifiant la représentation, on peut ainsi trouver plus rapidement la solution (ou en voir l'impossibilité !). Pour certains problèmes, comme ceux que nous venons de voir, les arêtes n'ont pas d'orientation. Pour d'autres, il est indispensable d'avoir une orientation sur le graphe : le plan d'une ville comme graphe non orienté satisfera le piéton, tandis que ce même graphe orienté par les sens de circulation sera bien plus apprécié de l'automobiliste.
Une question importante est celle du choix du graphe associé à une situation donnée (il peut y en avoir plusieurs) ; comment choisir les sommets et les arêtes ? Comme on vient de le voir dans le problème des segments, ce n'est pas toujours évident. Dans des paragraphes ultérieurs, on étudiera des questions de compatibilité, il faudra décider si les arêtes correspondent aux couples de points compatibles ou incompatibles, et si les arêtes sont orientées ou non.
Nous allons formaliser les notions qui précèdent.

Définition 1.1 (Graphe, sommets, arêtes, sommets adjacents)**.** Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble S de points appelés *sommets*, et d'un ensemble A d'*arêtes*, tels qu'à chaque arête sont associés deux sommets, appelés ses *extrémités*.
Deux sommets qui sont les extrémités d'une arête sont dits *adjacents*.

Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une *boucle*. Deux arêtes peuvent aussi avoir les mêmes extrémités (on dit alors qu'elles sont *parallèles*). Cependant, la très grande majorité des problèmes que nous rencontrerons, où des graphes non orientés seront en jeu, concerne des graphes *simples*, c'est-à-dire sans boucles ni arêtes parallèles. Les termes *simples* et *parallèles* ne sont pas à retenir.

Exemple 1.1. On considère le graphe G_1, de la figure 1.1. Le sommet s_4 est un sommet isolé, l'arête a est une boucle, b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3, puisqu'ils sont reliés par une arête.

FIGURE 1.1: Le graphe G_1



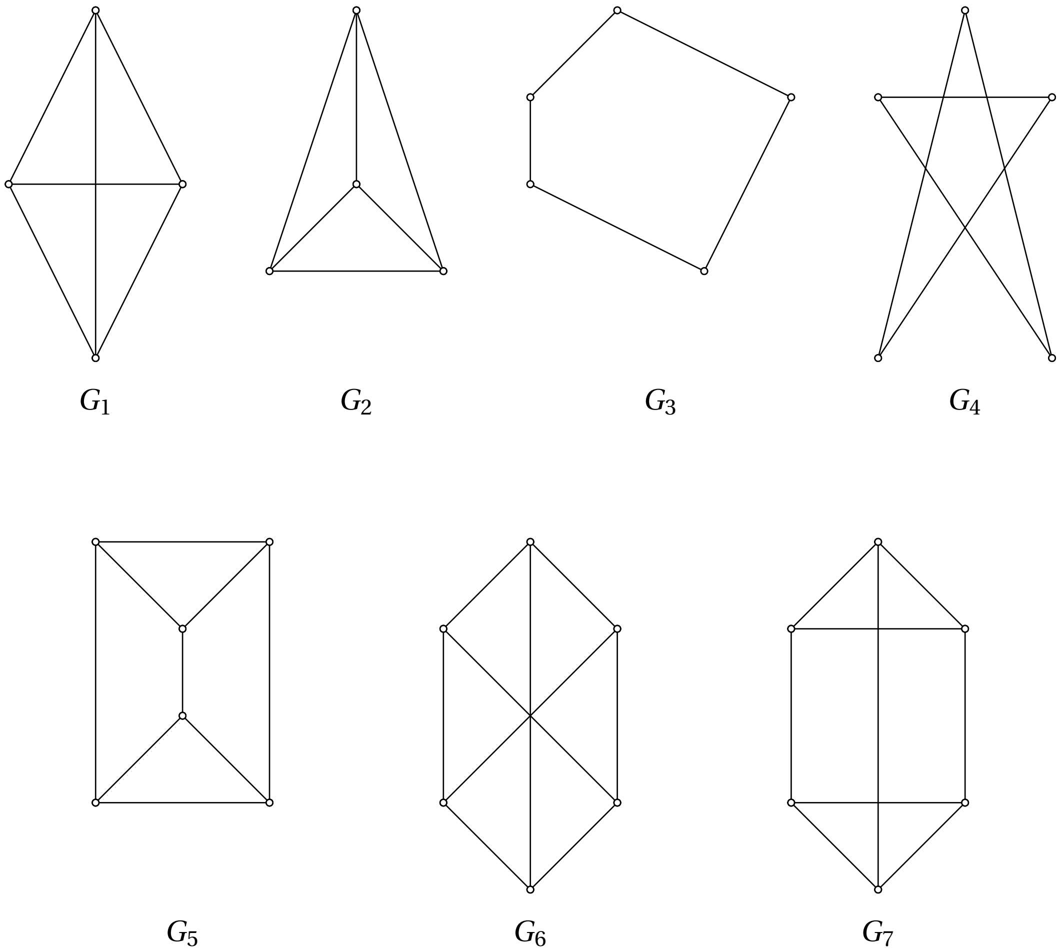
Remarque. La position des sommets et la longueur ou l'allure des arêtes n'ont aucune importance.

EXERCICE.
Parmi les sept graphes donnés dans la figure 1.2 page ci-contre, déterminer ceux qui sont identiques.

Remarque. C'est un problème très difficile en général, dès que le nombre de sommets est assez grand.

Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets :

FIGURE 1.2: Sept graphes



Définition 1.2 (Ordre d'un graphe)**.** L'*ordre* d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Définition 1.3 (Degré d'un sommet, parité d'un sommet)**.** On appelle *degré d'un sommet* le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est *pair* (respectivement *impair*) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).

Exemple 1.2. Dans la figure 1.1 page précédente, s_1 est de degré 5, s_2 de degré 3, s_4 de degré 0.

On prouve facilement le théorème suivant :

Théorème 1.1. *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.*

Preuve. Lorsque on additionne les degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. ♢

Propriété 1.2. *Dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.*

Preuve. En effet, sinon, la somme des degrés des sommets serait impaire. ♢

EXERCICE.
À l'aide de ce théorème ou de cette propriété, montrer que certains des problèmes donnés en introduction n'ont pas de solution.

1.3 Graphes complets

Définition 1.4 (Graphe complet)**.** Un graphe (simple) est dit *complet* si tous ses sommets sont *adjacents*, c'est-à-dire si toutes les arêtes possibles existent. On appelera K_n le graphe complet à n sommet (il n'y en a qu'un).

EXERCICE.
Parmi les graphes de la figure 1.2 page précédente, lesquels sont complets ?

EXERCICE.
Quel est le degré de chacun des sommets d'un graphe complet d'ordre n ?

1.4 Sous-graphes

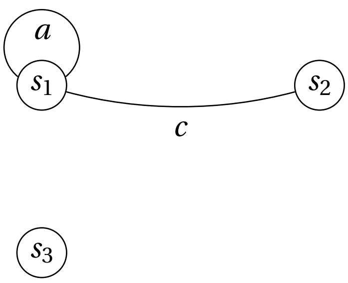
Définition 1.5 (Sous-graphe, sous-graphe engendré par des sommets)**.** Soit G un graphe, le graphe G' est un *sous-graphe* de G, si :
- l'ensemble des sommets de G' est inclu dans celui des sommets de G ;
- l'ensemble des arêtes de G' est inclu dans celui des arêtes de G.

Si, de plus, les arêtes de G' sont exactement *toutes* les arêtes de G joignant les sommets de G', on dit que G' est *le sous-graphe de G engendré par* $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

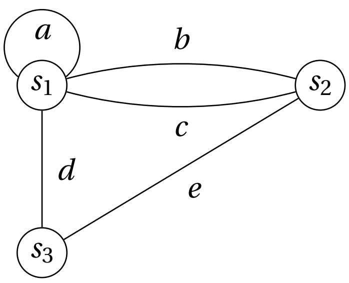
Exemple 1.3. Considérons le graphe G dont les sommets sont les villes françaises possédant une gare et dont les arêtes sont les voies ferrées reliant ces villes (on excluera les gares où ne passent plus de voies).
- Le graphe G' dont les sommets sont les villes d'un même département possédant une gare et dont les arêtes sont les voies ferrées reliant ces villes est le sous-graphe de G engendré par ces villes.
- Le graphe G'' dont les sommets sont les villes où passe un TGV et dont les arêtes sont des voies ferrées TGV est un simple sous-graphe de G car il existe des voies normales reliant, par exemple, Marseille à Lyon, qui ne sont pas dans ce sous-graphe.

Exemple 1.4. La figure 1.3 de la présente page présente deux sous graphes du graphe G_1.

FIGURE 1.3: Deux sous-graphes de G_1



G_2 un sous-graphe de G_1



G_3 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_2, s_3

EXERCICE.
Dessiner les graphes suivants :

- G_4 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_2 ;
- G_5 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_3, s_4 ;
- G_6 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_4 ;
- G_7 le sous-graphe de G_1 engendré par s_2 et s_4.

Enfin on a :

Définition 1.6 (Sous-graphe stable)**.** On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est *stable* s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents. On peut aussi parler de sous-graphe stable : cela revient au même, puisque si un ensemble de sommets est stable, le graphe engendré, par définition, n'a pas d'arête.

Exemple 1.5. Dans l'exercice ci-dessus, le sous-graphe G_7 est stable.

Ce terme de « stable » peut paraître arbitraire. Il est en fait naturel si l'on considère ce qu'on appelle un « graphe d'incompatibilité » : dans un groupe d'individus, on peut définir un graphe en reliant par une arête les individus qui ne peuvent se supporter. Si l'on veut choisir un sous-groupe de personnes qui travaillent ensemble, il est préférable de choisir un sous-ensemble stable ! On verra en particulier beaucoup d'applications de cette notion dans le paragraphe sur les colorations.

1.5 Chaînes et connexité

Dans bien des problèmes de graphes, il est naturel de considérer ce que l'on peut appeler, de façon informelle, des « parcours » ou « chemins ». Le mot utilisé en théorie des graphes est *chaîne*.
La notion intuitive de chaîne, ou plus tard de chaîne orientée, se comprend bien sur un dessin, il est moins facile d'en donner une définition effective.

Définition 1.7 (Chaîne, longueur d'une chaîne, cycle)**.** Une *chaîne* dans un graphe G est une suite finie : $s_0; a_1; s_1; a_2; s_2; a_3; s_3; \dots a_n; s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités.
La *longueur* de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la constituent ; la chaîne est *fermée* si $s_0 = s_n$, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un *cycle*.

Remarque. Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets ou par seulement la suite de ses arêtes.

Enfin on a :

Définition 1.8 (Graphe connexe)**.** Un graphe est *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Définition 1.9 (Distance entre deux sommets)**.** Soit G un graphe connexe, s et s', deux sommets quelconques de G. Le graphe étant connexe, il existe au moins une chaîne reliant s et s'. On appelle *distance entre s et s'* la plus petite des longueurs des chaînes reliant s à s'.

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, il existe au moins deux sommets qui ne sont pas reliés par une chaîne. On dit parfois que la distance entre ces sommets est infinie.

Définition 1.10 (Diamètre d'un graphe)**.** On appelle *diamètre* d'un graphe connexe, la plus grande distance entre ses sommets.

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, on dit parfois que son diamètre est infini.

1.6 Graphes orientés

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : plan de ville, avec les sens interdits ; parcours en montagne, où il est utile d'indiquer le sens de montée ! Circuit électrique en courant continu, où il faut orienter les arêtes pour décider du signe de l'intensité : ce n'est pas la même chose de faire passer 10 ampères de A vers B ou de B vers A ; graphe d'ordonnancement, où les arêtes relient une tâche à une autre qui doit la suivre : on ne peut faire la peinture avant le plâtre.

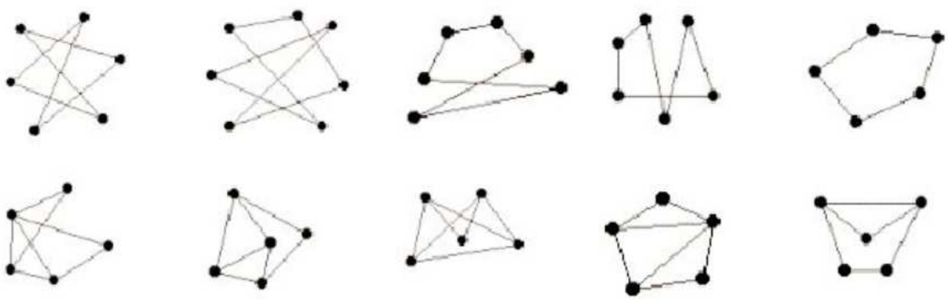
Définition 1.11. On appelle graphe orienté un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle va de l'une des ses extrémités, appelée *origine* ou *extrémité initiale* à l'autre, appelée *extrémité terminale*.

Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin. Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot « orienté » pour préciser ; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner.
En particulier, une chaîne orientée est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).

1.7 Exercices

EXERCICE 1.1.
Parmi les graphes de la figure 1.4 de la présente page, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.

FIGURE 1.4: Graphes de l'exercice 1.1



EXERCICE 1.2.
- Dessiner les graphes complets K_n, pour $n = 2; 3; 4; 5$. Combien ont-ils d'arêtes ?
- Dessiner les graphes simples d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.

EXERCICE 1.3.
Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
- Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
- Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

EXERCICE 1.4.
Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

EXERCICE 1.5.
Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :

- 6-3-2-2-1-1-1
- 7-5-3-2-2-2-2-2

EXERCICE 1.6 (Associer un graphe à une situation)**.**
Comparer les trois graphes définis ci-dessous :

- on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;
- on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;
- les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;
- trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

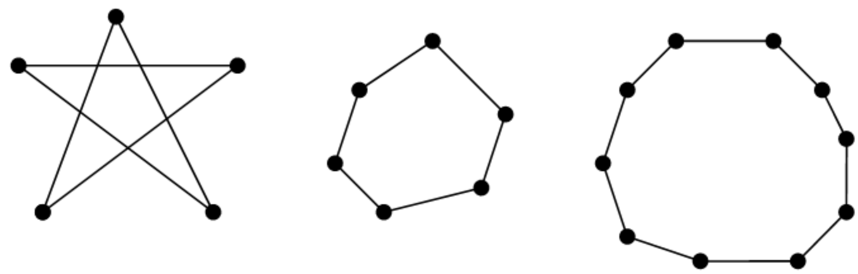
EXERCICE 1.7.

1. Dessiner tous les graphes simples possible d'ordre n pour n variant de 1 à 4.
2. Lire graphiquement leur diamètre.
3. Caractériser les graphes de diamètre 1.

EXERCICE 1.8 (Diamètre d'un graphe)**.**

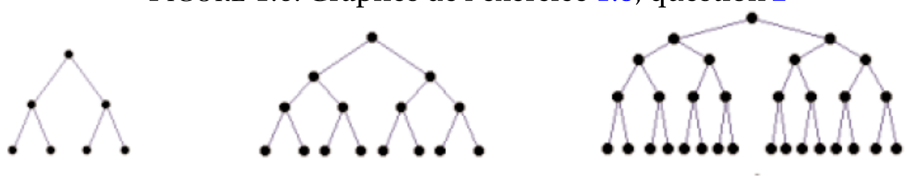
1. Quels sont les diamètres des graphes de la figure 1.5 de la présente page ?

FIGURE 1.5: Graphes de l'exercice 1.8, question 1



2. Quels sont les diamètres des graphes de la figure 1.6 de la présente page ? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?

FIGURE 1.6: Graphes de l'exercice 1.8, question 2



EXERCICE 1.9.
Quel est le diamètre du graphe donné par la figure 1.7 page suivante ?

FIGURE 1.7: Graphe de l'exercice 1.9