Mathématiques en Terminale ES
Enseignement de spécialité

David ROBERT

2012–2013

Sommaire

Chapitre 1

Matrices

Sommaire

1.1 Activités

Activité 1.1 (Sommes et combinaisons linéaires de tableaux de nombres)**.**
Un carré magique est un tableau carré dans lequel la somme des lignes, des colonnes ou des diagonales est la même.

1. Montrer que le tableau ci-dessous est un carré magique.

2	−1	2
1	1	1
0	3	0

2. Montrer que le tableau précédent peut s'écrire sous la forme de la somme des trois tableaux ci-dessous.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	−1	0
−1	0	1
0	1	−1

0	−1	1
1	0	−1
−1	1	0

3. Construire un autre tableau en multipliant le premier tableau par 2, le deuxième par 3 et le dernier par 4 et en ajoutant les trois tableaux obtenus. Ce tableau est-il un carré magique ?

Activité 1.2 (Sommes et multiplications de tableaux de nombres)**.**
Le premier tableau contient les notes de quatre élèves lors de 3 devoirs.
Les élèves terminent la correction chez eux et gagnent de 0 à 2 points supplémentaires. Les gains des quatre élèves sont donnés par le deuxième tableau.
Les coefficients des trois devoirs sont donnés dans le troisième tableau.

1. Calculer les notes finales obtenues par les élèves.

Notes des quatre élèves

	D_1	D_2	D_3
Sarah	12	15	8
David	10	12	13
Nina	16	18	17
Louis	8	15	9

Gains des quatre élèves

	D_1	D_2	D_3
Sarah	1	0	2
David	2	1	0
Nina	1	0	2
Louis	2	2	2

Coefficients des devoirs

D_1	1
D_2	4
D_3	2

2. Calculer le total des points obtenu par chaque élève en tenant compte des coefficients, puis la moyenne de chacun.

ACTIVITÉ 1.3 (Produits de tableaux de nombres)**.**
Le premier tableau ci-dessous donne les prix, en euros, de trois shampooings avec ou sans remise de fidélité.
Le second tableau indique les quantités achetées par deux clientes A et B.
Calculer le prix total payé par chaque cliente selon qu'elle bénéficie ou non de la remise.

	Nutri	Color	Milky
Prix unitaire	6	7	9
Prix avec remise	5	5	8

Quantités	A	B
Nutri	3	2
Color	1	1
Milky	2	2

1.2 Définitions

Définition 1.1. Une *matrice* A de dimension (ou d'ordre) $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.
Les nombres sont appelés *coefficients* (ou éléments) de la matrice.
Le coefficient situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est noté a_{ij} ou $a_{i,j}$. On note parfois $A = \left(a_{ij}\right)$.

Définition 1.2. Certaines matrices particulières portent des noms :
- Matrice ligne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une ligne ;
- Matrice colonne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une colonne ;
- Matrice carrée : C'est une matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes ; on dit qu'elle est d'ordre n (lorsqu'il y a n lignes et n colonnes) ;
- Matrice unité : C'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la première diagonale qui sont tous égaux à 1 ; on note I_n la matrice unité d'ordre n ;
- Matrice nulle : C'est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à zéro ;

1.3 Égalité de deux matrices

Définition 1.3. Deux matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

1.4 Addition de matrices

Définition 1.4. La *somme de deux matrices* $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ de même dimension est la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que les coefficients de C sont la somme des coefficients de A et de B situés à la même place : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout i et j.

Définition 1.5. La *multiplication par un réel k d'une matrice* $A = \left(a_{ij}\right)$ est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k : $kA = \left(ka_{ij}\right)$

Théorème 1.1. *Soient A, B et C trois matrices de même dimension et k et k' deux réels. On a :*
1. $A + B = B + A$ *(on dit que l'addition des matrices est commutative) ;*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(on dit que l'addition des matrices est associative) ;*
3. $k(A + B) = kA + kB$ *;*
4. $(k + k')A = kA + k'A$ *;*
5. $k(k'A) = (kk')A$*.*

Preuve.

1. $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$ et $B+A=\left(b_{ij}+a_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$
2. $(A+B)+C=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right)$ et $A+(B+C)=\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right)$
3. $k(A+B)=k\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\left(k(a_{ij}+b_{ij})\right)=\left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)$ et $kA+kB=\left(ka_{ij}\right)+\left(kb_{ij}\right)=\left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)$
4. $(k+k')A=(k+k')\left(a_{ij}\right)=\left((k+k')a_{ij}\right)=\left(ka_{ij}+k'a_{ij}\right)$ et $kA+k'A=\left(ka_{ij}\right)+\left(k'a_{ij}\right)=\left(ka_{ij}+k'a_{ij}\right)$
5. $k(k'A)=k\left(k'a_{ij}\right)=\left(kk'a_{ij}\right)$ et $(kk')A=\left(kk'a_{ij}\right)$

♢

1.4.1 Matrices opposées, différence de deux matrices

Définition 1.6. Deux matrices A et B sont dites opposées si elles sont de même dimension et si $A+B$ est une matrice nulle.

Propriété 1.2. *Toute matrice A a une matrice opposée : la matrice $(-1)\times A$. On la notera $-A$.*

Preuve. $A+(-1)\times A=\left(a_{ij}\right)+\left(-a_{ij}\right)=(0)$ ♢

Définition 1.7. Soient A et B deux matrices de même dimension. Alors la différence de A et B, notée $A-B$, est la matrice $A+(-B)$.

1.5 Multiplication de matrices

1.5.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 1.8. Soient A une matrice ligne de dimension $1\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times 1$, telles que $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension 1×1 telle que : $C=\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p\right)=\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\times b_i\right)$.

1.5.2 Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Définition 1.9. Soient A une matrice ligne de dimension $n\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times 1$, telles que $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n\times 1$ telle que la première ligne de C est le produit de la première ligne de A par B, la deuxième ligne de C est le produit de la deuxième ligne de A par B, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1p}b_p \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2p}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+\cdots+a_{np}b_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i}\times b_i \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2i}\times b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} a_{ni}\ timesb_i \end{pmatrix}.$$

1.5.3 Multiplication de deux matrices

Définition 1.10. Soient A une matrice ligne de dimension $n\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times m$, telles que $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm}\end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n\times m$ telle que le premier coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la première colonne de B, le deuxième coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la deuxième colonne de B, et ainsi de suite.

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1m}+a_{12}b_{2m}+\cdots+a_{1p}b_{pm} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1m}+a_{22}b_{2m}+\cdots+a_{2p}b_{pm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{np}b_{p1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{np}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{1m}+a_{n2}b_{2m}+\cdots+a_{np}b_{pm}\end{pmatrix}.$$

1.5.4 Propriétés de la multiplication des matrices

Théorème 1.3. *Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations suivantes existent. Alors :*

1. *En général $A\times B\neq B\times A$ (on dit que la multiplication des matrices n'est pas commutative) ;*
2. *$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ (on dit que la multiplication des matrices est associative) ;*
3. *$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$*
4. *$(A+B)\times C=A\times C+B\times C$*

On l'admettra.

Remarque. On notera $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots A}_{n\text{ fois}}$ quand ce produit est défini.

1.5.5 Inverse d'une matrice

Définition 1.11. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A\times B=B\times A=I$ où I est une matrice unité. On notera alors $B=A^{-1}$ (ou $A=B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

1.6 Exercices

1.6.1 Technique

EXERCICE 1.1.
Lors d'un examen, on a relevé les notes de langues vivantes LV1, LV2 et LV3 pour plusieurs élèves. Ces notes ont été placées dans la matrice M :

$$M=\begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 16 & 18 & 17 \\ 10 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 \\ 18 & 19 & 13 & 12 & 13 & 16\end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de cette matrice.
2. Combien d'élèves ont passé ces épreuves ?
3. Quelle est la note obtenue en LV3 par l'élève 2 ?
4. Donner la valeur des éléments a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{36}.

EXERCICE 1.2.
Préciser le type de chacune des matrices suivantes :

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$;
- $B=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5\end{pmatrix}$;
- $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;
- $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

EXERCICE 1.3.
On pose $A=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles $A=B$.

EXERCICE 1.4.
On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $4A-2B$.

EXERCICE 1.5.
Dans chacun des cas suivants, préciser si le produit $A\times B$ existe et, si oui, le calculer.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

EXERCICE 1.6.
On donne $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer BC, puis $A(BC)$.
   (b) Calculer AB puis $(AB)C$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(BC)A$?
2. (a) Calculer $(B+C)$, puis $A\times(B+C)$.
   (b) Calculer AB et AC puis $AB+AC$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(B+C)\times A$?

EXERCICE 1.7.
Démontrer que les matrices A et B suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 1.8.
1. Trouver l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

EXERCICE 1.9.
À l'aide de la calculatice, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

- $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;
- $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 1.10.
On donne $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A\times B$. Que constate-t-on ?
2. B est-elle la matrice inverse de A ?

1.6.2 Pour aller plus loin

EXERCICE 1.11.
On pourra effectuer tous les calculs demandés à la calculatrice.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Calculer :
   - $A \times B$;
   - $B \times A$;
   - A^2 ;
   - A^3 ;
   - B^2 ;
   - B^3.
2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Que constate-t-on ?

EXERCICE 1.12.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 1.13.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 1.14.
Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.
Calculer $J - I_3$ puis $(J - I_3)^2$ puis $(J - I_3)^3$.

EXERCICE 1.15.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire l'inverse de la matrice A.
3. On pose $B = A^2$. Déterminer l'inverse de B.

EXERCICE 1.16.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.

1. Vérifier que A^3 est la matrice nulle.
2. Développer le produit matriciel : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$.
3. Déduire des résultats précédents la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 1.17.
On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $A = P \times D \times P^{-1}$.
2. Calculer D^2, D^3 et D^4.
3. Expliquer pourquoi $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$, $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$ et $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$

1.7 Matrices et systèmes

1.7.1 Activité

Nous savons que par deux points du plan passe une unique droite.
Le plan étant muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, soient $A(2\,;3)$ et $B(4\,;6)$ deux points de ce plan et (AB) : $y = mx + p$ l'équation réduite de la droite (AB).

1. Montrer que m et p sont solutions du système :

$$\begin{cases} 2m + p = 3 \\ 4m + p = 6 \end{cases}$$

2. On donne les matrices A, X et B suivantes :

   - $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
   - $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$
   - $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Calculer AX.
   En déduire une équation matricielle équivalente au système de la question 1.
3. On suppose que A est inversible et on note A^{-1} son inverse.
   Isoler la matrice des inconnues X à l'aide de A^{-1}.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer alors les valeurs de m et p.

1.7.2 Bilan

Propriété 1.4. *Tout système linéaire à n inconnues et n équations peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre n, X la matrice colonne $(n \times 1)$ des inconnues et B une matrice colonne $(n \times 1)$.*
Si A est inversible, alors le système a une unique solution qui est telle que $X = A^{-1} \times B$.

1.7.3 Problèmes

EXERCICE 1.18.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice inverse de A est $\begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ 3{,}5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Soit le système $\begin{cases} 6x - 4y = 7 \\ 7x - 5y = 8 \end{cases}$.
   En utilisant la matrice A^{-1}, chercher la solution de ce système.

EXERCICE 1.19.
Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 30 € pièce, les autres 60 € pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 7 260 €.
On note x le nombre de chaises à 30 € et y le nombre de chaises à 60 € vendues dans la journée.

1. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7\,260 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$.
3. En déduire le nombre de chaises à 30 € et à 60 € qui ont été vendues.

EXERCICE 1.20.
Pour chacun des systèmes suivants, les écrire sous la forme matricielle $A \times X = B$, chercher la matrice inverse de A et, à l'aide de votre calculatrice, en déduire la solution du système.

1. $\begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ 3x - 8y = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ -x + y - 2z = -5 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x - y + z + 2t = 4 \\ 3x - 2y + 5z - 2t = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

EXERCICE 1.21.

Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et le parcours à bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.

On se propose de calculer la longueur de chacun des parcours.

On note n la longueur du parcours de natation, p celle du parcours de course à pied et b celle du parcours à bicyclette.

1. Montrer que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet que A est inversible. Montrer que : $\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. À l'aide de votre calcutrice, déterminer n, p et b.

EXERCICE 1.22.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Sa courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $M(1;0)$, $N(-1;-4)$ et $P(2;-1)$.

1. Montrer que a, b et c sont solutions du système :
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=-4 \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases}$$
2. Résoudre ce système à l'aide des matrices.

EXERCICE 1.23.

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en m^3 utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé en m^3 : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

1. Représenter le nuage de points $\left(x_i ; y_i\right)$.
(*Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour ; ordonnée 0,5 cm pour un m*^{3}).
2. Le nuage de points a une allure qui permet d'envisager une modélisation de la consommation par une parabole $\mathscr{P}$ qui aurait pour équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.
   (a) Déterminer un système d'équation d'inconnues $(a; b; c)$ sachant qu'on veut que la parabole passe par les points $A(1; 2,25)$, $B(5; 8)$ et $C(10; 27)$.
   (b) À l'aide des matrices, résoudre ce système.
   (c) Représenter alors cette parabole sur le même graphique.
   Ce modèle semble-t-il satisfaisant ?
   (d) À l'aide de ce modèle, déterminer quelle serait la consommation d'eau pour l'exploitation au bout de 20 jours.

EXERCICE 1.24.

Au cours d'une séance d'essais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.

Au moment du top sonore, on mesure v_i (en km/h) de l'automobile, puis la distance d_i (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule.

Pour sept expériences, on a obtenu les résultats suivants :

vitesse v_i	20	43	62	80	98	115	130
distance d'arrêt d_i	3,5	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8	168,5

1. Dans le repère fourni sur la figure 1.1 page ci-contre, représenter le nuage de points de coordonnées $(v_i ; d_i)$.
Un modèle affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On envisage un modèle parabolique d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points $(20; 3,5)$, $(80; 67,8)$ et $(130; 168,5)$.

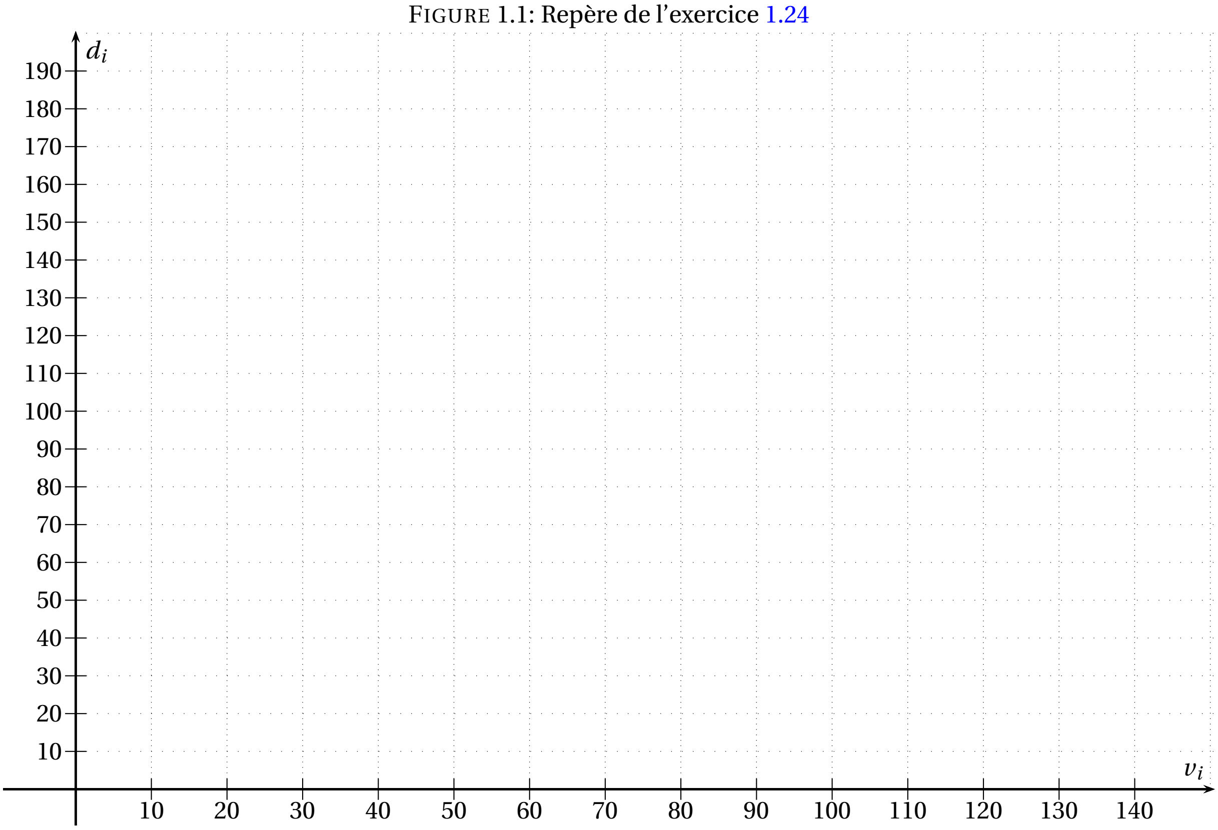
(a) Déterminer le système d'équation dont $(a; b; c)$ est solution.

(b) À l'aide des matrices, résoudre ce système.

(c) Représenter alors cette parabole sur le même graphique.
Ce modèle semble-t-il satisfaisant ?

(d) Le manuel du code de la route donne, pour calculer la distance d'arrêt (en m), la méthode suivante : « Prendre le carré de la vitesse exprimée en dizaines de km/h ».
Comparer les résultat obtenus par le modèle parabolique à ceux que l'on obtiendrait avec cette méthode.

FIGURE 1.1: Repère de l'exercice 1.24



EXERCICE 1.25 (Modèle fermé de LEONTIEF)**.**
Dans un pays imaginaire, l'économie repose sur trois secteurs : industrie, services et électricité.
Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de la production des deux autres secteurs et d'une partie de sa propre production.
Ces échanges durant une année sont résumés dans le tableau des entrées-sorties ci-dessous :

	Industrie	Services	Électricité
Produire 1 unité de l'industrie consomme	30 %	30 %	30 %
Produire 1 unité de services consomme	40 %	10 %	50 %
Produire 1 unité d'électricité consomme	30 %	60 %	20 %

Ce modèle est dit *fermé* car on suppose qu'il n'existe aucun échange avec l'extérieur.
Cette économie est dite *équilibrée* si la production totale de chaque secteur est égale à sa consommation totale.
On se propose de déterminer la production de chaque secteur afin que l'économie soit équilibrée.

On note x, y et z le nombre d'unités produites, respectivement, par les secteurs de l'industrie, des services et de l'électricité.

1. Expliquer pourquoi l'économie est équilibrée si et seulement si on a $A \times P = P$ où A est une matrice qu'on explicitera et $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Expliquer pourquoi résoudre $A \times P = P$ revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -0,7x + 0,3y + 0,3z = 0 \\ 0,4x - 0,9y + 0,5z = 0 \\ 0,3x + 0,6y - 0,8z = 0 \end{cases}$$

3. Voici la résolution de ce système avec le logiciel Xcas. Expliquer l'affichage.

```
insolve([-0.7x+0.3y+0.3z=0, 0.4x-0.9y+0.5z=0, 0.3x+0.6y-0.8z=0],[x,y,z])
[0.823529411765*z,0.921568627451*z,z]
```

4. Pour une production de 10 000 unités d'électricité, combien les secteurs de l'industrie et des services doivent-ils produire d'unités pour que l'économie soit équilibrée (*on arrondira à l'unité*) ?

EXERCICE 1.26 (Modèle ouvert de LEONTIEF)**.**
L'économie d'un pays fictif dépend de trois secteurs : l'agriculutre, les biens manufacturés et l'énergie. L'unité de production est le milliard d'euros.
Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de la production des autres secteurs et d'une partie de sa propre production. Ces secteurs doivent, en outre, satisfaire les besoins de la population. On parle alors de modèle *ouvert* car il y a demande extérieure aux trois secteurs.
Les tableaux des entrées-sorties ci-dessous détaillent ces échanges durant une année :

	Agriculture	Bien manufacturés	Énergie
Produire 1 unité d'agriculture consomme	0,293	0	0
Produire 1 unité de bien manufacturés consomme	0,014	0,207	0,017
Produire 1 unité d'énergie consomme	0,044	0,01	0,216

Besoins de la population
13,2 unités d'agriculture
17,6 unités de biens manufacturés
1,8 unité d'énergie

Afin d'avoir une économie équilibrée, la production totale de ces secteurs doit couvrir les besoins des secteurs **et** de la population.
On se propose de déterminer les productions de l'agriculture, des biens manufacturés, de l'énergie pour que l'économie soit équilibrée.

On note respectivement x, y et z le nombre d'unités produites par l'agriculture, les biens manufacturés et l'énergie pendant une année.

1. Expliquer pourquoi $0,014x+0,207y+0,017z+17,6=y$ puis écrire des équations analogues pour tous les secteurs.
2. Montrer que le système obtenu s'écrit $A\times P+D=P$ où $P=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}13,2\\17,6\\1,8\end{pmatrix}$ et A est une matrice carrée à préciser.
3. Interpréter en termes d'économie la matrice $A\times P$.
4. Montrer que résoudre l'équation $A\times P+D=P$ revient à résoudre l'équation $(I_3-A)\times P=D$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
   La matrice $I-A$ est appelée matrice de LEONTIEF.
5. On pose $\mathscr{L}=I_3-A$.
   Déterminer $\mathscr{L}$, puis utiliser la calculatrice pour résoudre l'équation matricielle $\mathscr{L}\times P=D$.
6. Quelle doit être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée (*on arrondira au dixième de milliard d'euros*) ?

EXERCICE 1.27.
Un vendeur de glaces et un autre de boissons travaillent sur une plage isolée. La journée de travail est longue aussi consomment-ils tous les deux glaces et boissons et vendent le reste aux vacanciers selon les modalités indiquées en pourcentage suivantes :

nécessite pour le vendeur	de l'ensemble des glaces	de l'ensemble des boissons
1 € de glaces vendues	2 %	1 %
1 € de boissons vendues	4 %	3,25 %

Demande des vacanciers
116
150

On note respectivement x et y le nombre d'euros de glaces et de boissons vendues.
On se propose de déterminer x et y pour que chacun, vendeurs et vacanciers, consomme ce qu'il souhaite et que tous les produits soient vendus.

1. Modélisation
   (a) Expliquer pourquoi $0,02x + 0,01y + 116 = x$ puis écrire une équation analogue pour les boissons.
   (b) Montrer que le système d'équations obtenu dans la question précédente est équivalent à l'équation matricielle $A \times V + D = V$ où les matrices A, V et D seront à préciser.
   (c) Montrer que $A \times V + D = V$ est équivalent à $\mathscr{L} \times V = D$ où $\mathscr{L} = \begin{pmatrix} 0,98 & -0,01 \\ -0,04 & 0,9675 \end{pmatrix}$
2. Résolution du problème
   (a) À l'aide de la calculatrice, résoudre $\mathscr{L} \times V = D$.
   (b) Résoudre le problème.

EXERCICE 1.28.
Ce tableau est un extrait de la table créée par WASSILY LEONTIEF lors de son étude de l'économie américaine en 1947. L'unité est le milliard de dollars de 1947.

nécessite… unités du secteur	La production d'1 unité de produits agricole	La production d'1 unité de produits manufacturés	La production d'1 unité de produits de services
Agriculture	0,4102	0,0301	0,0257
Manufactures	0,0624	0,3783	0,1050
Services	0,1236	0,1588	0,1919

Demande de la population
39,24
60,02
130,65

On suppose que l'économie est équilibrée, c'est-à-dire que la production totale de ces trois secteurs couvre les besoins de ces secteurs et de la population.

1. Écrire l'équation matricielle qui traduit l'équilibre de cette économie.
2. Déterminer alors la production de chaque secteur en 1947 (*on arrondira les résultats à l'unité*).
3. Analyser le changement de production de chaque secteur si la demande de la population est donnée par $D = \begin{pmatrix} 40,24 \\ 60,02 \\ 130,65 \end{pmatrix}$

EXERCICE 1.29.
Les tableaux ci-dessous indiquent les ventes de la buvette lors d'un festival de musique durant trois jours ainsi que les prix pratiqués.

Ventes	Sandwich	Frite	Boisson
Jour 1	70	110	225
Jour 2	105	135	290
Jour 3	63	90	185

	Prix
Sandwich	4 €
Frite	2,50 €
Boisson	1,50 €

Certains participants du festival ont laissé entendre au gérant de la buvette qu'il pratiquait des prix trop élevés.
En prévision du festival de l'année prochaine, le gérant estime qu'en baissant ses prix de 20 %, il augmenterait ses ventes de 20 %.
A-t-il intérêt à baisser ses prix ? *On utilisera les matrices pour répondre à la question.*

Devoir surveillé nº 1

Matrices

EXERCICE 1.1 (2 points)**.**
Calculatrice déconseillée.
Le calcul ci-dessous est celui de $A \times B$ où A et B sont les matrices indiquées, mais il est incomplet.
Indiquer, sur votre copie, le détail du calcul du coefficient manquant et son résultat.

$$\begin{array}{cc} & B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & \dots \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

EXERCICE 1.2 (3 points)**.**
Calculatrice déconseillée.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si les matrices proposées sont inverses l'une de l'autre en justifiant :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 1.3 (4 points)**.**
Calculatrice conseillée.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire l'inverse de la matrice A.
3. On pose $B = A^2$. Déduire de ce qui précède l'inverse de B.

EXERCICE 1.4 (4 points)**.**
Calculatrice déconseillée.
On donne :

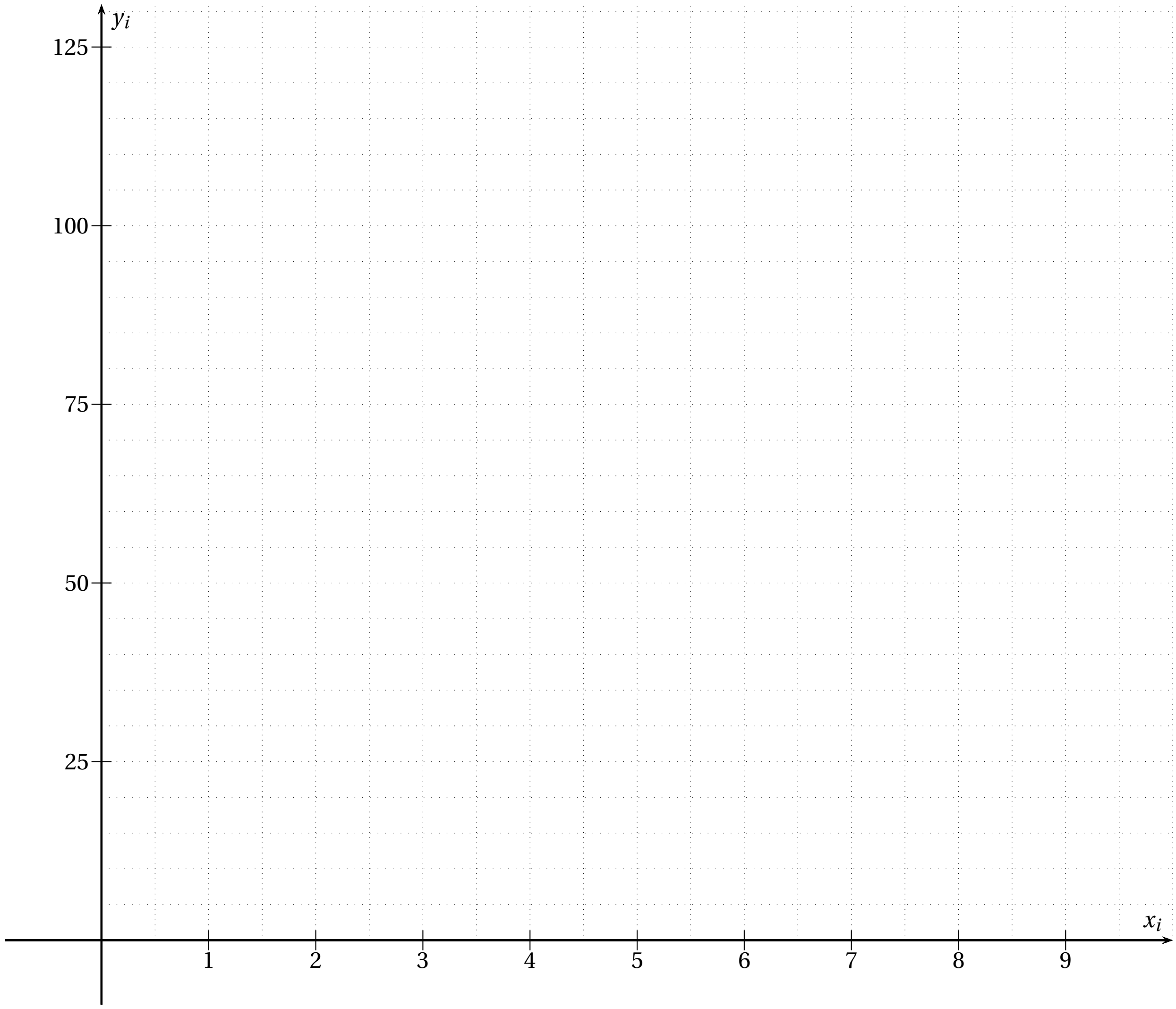
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$ où I est la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire $A^3 - 3A^2 + 3A$.
3. En déduire, par un calcul matriciel, que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

EXERCICE 1.5 (7 points)**.**
Calculatrice conseillée.
Le tableau suivant donne la production mondiale de sucre brut en millions de tonnes (le rang 0 est à l'année 1900) :

année	1 920	1 940	1 960	1 970	1 980	1 990
rang x_i	2	4	6	7	8	9
production y_i	16,8	29,9	55,4	72	88	113,9

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ dans le repère de la figure ci-dessous.
2. On envisage un modèle parabolique d'équation $y = ax^2 + bx + c$ pour $x \geqslant 0$ passant par les points $A\,(2;16,8)$, $B\,(6;55,4)$ et $C\,(9;113,9)$.
   (a) Déterminer un système d'équation dont $(a;b;c)$ est solution.
   (b) À l'aide des matrices, résoudre ce système. On donnera les valeurs approchées de a, b et c à 10^{-3}.
3. Pour la suite nous prendrons le modèle parabolique ayant l'équation suivante : $y = 1,4x^2 - 1,6x + 14$ pour $x \geqslant 0$.
   (a) Représenter le modèle dans le même repère. Semble-t-il satisfaisant ?
   (b) Estimer la production qu'on pouvait prévoir en 1995 (arrondie au dixième).
   (c) Estimer l'année où la production y atteindra 150 millions de tonnes.
4. La production de sucre en 1995 a été de 116,4 millions de tonnes.
   Quelle est l'erreur commise en pourcentage avec la prévision du 3b ?



Chapitre 2

Graphes : premières notions

Sommaire

2.1 Quelques problèmes

PROBLÈME 2.1 (Matches de football)**.**
Une ligue de football comporte cinq équipes.
- Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?
- Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

PROBLÈME 2.2 (Segments)**.**
Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

PROBLÈME 2.3 (Poignées de main)**.**
M. et Mme EULER assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance : certains participants à la réunion se saluent en se serrant la main.
- Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main.
- Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.
- M. EULER constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

PROBLÈME 2.4 (Ouverture de magasins)**.**
Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes :
- les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ;
- il en est de même pour les deux derniers ;
- au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

2.2 Premières notions

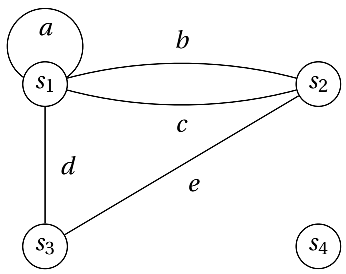
De très nombreux problèmes pratiques peuvent être ainsi schématisés à l'aide d'un graphe ; en simplifiant la représentation, on peut ainsi trouver plus rapidement la solution (ou en voir l'impossibilité !). Pour certains problèmes, comme ceux que nous venons de voir, les arêtes n'ont pas d'orientation. Pour d'autres, il est indispensable d'avoir une orientation sur le graphe : le plan d'une ville comme graphe non orienté satisfera le piéton, tandis que ce même graphe orienté par les sens de circulation sera bien plus apprécié de l'automobiliste.
Une question importante est celle du choix du graphe associé à une situation donnée (il peut y en avoir plusieurs) ; comment choisir les sommets et les arêtes ? Comme on vient de le voir dans le problème des segments, ce n'est pas toujours évident. Dans des paragraphes ultérieurs, on étudiera des questions de compatibilité, il faudra décider si les arêtes correspondent aux couples de points compatibles ou incompatibles, et si les arêtes sont orientées ou non.
Nous allons formaliser les notions qui précèdent.

Définition 2.1 (Graphe, sommets, arêtes, sommets adjacents)**.** Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble S de points appelés *sommets*, et d'un ensemble A d'*arêtes*, tels qu'à chaque arête sont associés deux sommets, appelés ses *extrémités*.
Deux sommets qui sont les extrémités d'une arête sont dits *adjacents*.

Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une *boucle*. Deux arêtes peuvent aussi avoir les mêmes extrémités (on dit alors qu'elles sont *parallèles*). Cependant, la très grande majorité des problèmes que nous rencontrerons, où des graphes non orientés seront en jeu, concerne des graphes *simples*, c'est-à-dire sans boucles ni arêtes parallèles. Les termes *simples* et *parallèles* ne sont pas à retenir.

Exemple 2.1. On considère le graphe G_1, de la figure 2.1. Le sommet s_4 est un sommet isolé, l'arête a est une boucle, b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3, puisqu'ils sont reliés par une arête.

FIGURE 2.1: Le graphe G_1



Remarque. La position des sommets et la longueur ou l'allure des arêtes n'ont aucune importance.

EXERCICE.
Parmi les sept graphes donnés dans la figure 2.2 page suivante, déterminer ceux qui sont identiques.

Remarque. C'est un problème très difficile en général, dès que le nombre de sommets est assez grand.

Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets :

Définition 2.2 (Ordre d'un graphe)**.** L'*ordre* d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Définition 2.3 (Degré d'un sommet, parité d'un sommet)**.** On appelle *degré d'un sommet* le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est *pair* (respectivement *impair*) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).

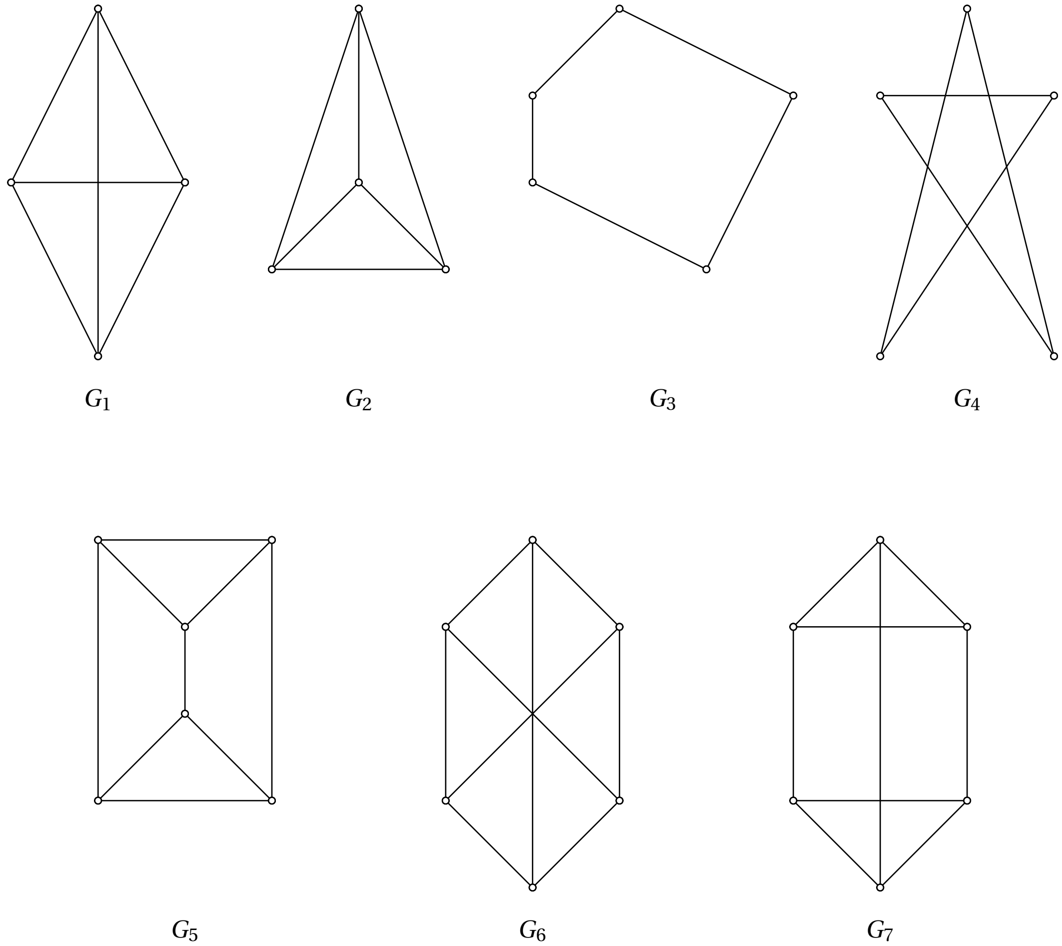
Exemple 2.2. Dans la figure 2.1, s_1 est de degré 5, s_2 de degré 3, s_4 de degré 0.

On prouve facilement le théorème suivant :

Théorème 2.1. *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.*

Preuve. Lorsque on additionne les degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. ♢

FIGURE 2.2: Sept graphes



Propriété 2.2. *Dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.*

Preuve. En effet, sinon, la somme des degrés des sommets serait impaire. ◊

EXERCICE.
À l'aide de ce théorème ou de cette propriété, montrer que certains des problèmes donnés en introduction n'ont pas de solution.

2.3 Graphes complets

Définition 2.4 (Graphe complet)**.** Un graphe (simple) est dit *complet* si tous ses sommets sont *adjacents*, c'est-à-dire si toutes les arêtes possibles existent. On appelera K_n le graphe complet à n sommet (il n'y en a qu'un).

EXERCICE.
Parmi les graphes de la figure 2.2, lesquels sont complets ?

EXERCICE.
Quel est le degré de chacun des sommets d'un graphe complet d'ordre n ?

2.4 Sous-graphes

Définition 2.5 (Sous-graphe, sous-graphe engendré par des sommets)**.** Soit G un graphe, le graphe G' est un *sous-graphe* de G, si :
- l'ensemble des sommets de G' est inclu dans celui des sommets de G ;
- l'ensemble des arêtes de G' est inclu dans celui des arêtes de G.

Si, de plus, les arêtes de G' sont exactement *toutes* les arêtes de G joignant les sommets de G', on dit que G' est *le sous-graphe de G engendré par* $s_1, s_2, \dots, s_n$.

Exemple 2.3. Considérons le graphe G dont les sommets sont les villes françaises possédant une gare et dont les arêtes sont les voies ferrées reliant ces villes (on excluera les gares où ne passent plus de voies).
- Le graphe G' dont les sommets sont les villes d'un même département possédant une gare et dont les arêtes sont les voies ferrées reliant ces villes est le sous-graphe de G engendré par ces villes.
- Le graphe G'' dont les sommets sont les villes où passe un TGV et dont les arêtes sont des voies ferrées TGV est un simple sous-graphe de G car il existe des voies normales reliant, par exemple, Marseille à Lyon, qui ne sont pas dans ce sous-graphe.

Exemple 2.4. La figure 2.3 de la présente page présente deux sous graphes du graphe G_1.

FIGURE 2.3: Deux sous-graphes de G_1

G_2 un sous-graphe de G_1

G_3 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_2, s_3

EXERCICE.
Dessiner les graphes suivants :
- G_4 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_2 ;
- G_5 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_3, s_4 ;
- G_6 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_4 ;
- G_7 le sous-graphe de G_1 engendré par s_2 et s_4.

Enfin on a :

Définition 2.6 (Sous-graphe stable)**.** On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est *stable* s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents. On peut aussi parler de sous-graphe stable : cela revient au même, puisque si un ensemble de sommets est stable, le graphe engendré, par définition, n'a pas d'arête.

Exemple 2.5. Dans l'exercice ci-dessus, le sous-graphe G_7 est stable.

Ce terme de « stable » peut paraître arbitraire. Il est en fait naturel si l'on considère ce qu'on appelle un « graphe d'incompatibilité » : dans un groupe d'individus, on peut définir un graphe en reliant par une arête les individus qui ne peuvent se supporter. Si l'on veut choisir un sous-groupe de personnes qui travaillent ensemble, il est préférable de choisir un sous-ensemble stable ! On verra en particulier beaucoup d'applications de cette notion dans le paragraphe sur les colorations.

2.5 Chaînes et connexité

Dans bien des problèmes de graphes, il est naturel de considérer ce que l'on peut appeler, de façon informelle, des « parcours » ou « chemins ». Le mot utilisé en théorie des graphes est *chaîne*.
La notion intuitive de chaîne, ou plus tard de chaîne orientée, se comprend bien sur un dessin, il est moins facile d'en donner une définition effective.

Définition 2.7 (Chaîne, longueur d'une chaîne, cycle)**.** Une *chaîne* dans un graphe G est une suite finie : $s_0; a_1; s_1; a_2; s_2; a_3; s_3; \dots a_n; s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités.
La *longueur* de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la constituent ; la chaîne est *fermée* si $s_0 = s_n$, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un *cycle*.

Remarque. Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets ou par seulement la suite de ses arêtes.

Enfin on a :

Définition 2.8 (Graphe connexe)**.** Un graphe est *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Définition 2.9 (Distance entre deux sommets)**.** Soit G un graphe connexe, s et s', deux sommets quelconques de G. Le graphe étant connexe, il existe au moins une chaîne reliant s et s'. On appelle *distance entre s et s'* la plus petite des longueurs des chaînes reliant s à s'.

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, il existe au moins deux sommets qui ne sont pas reliés par une chaîne. On dit parfois que la distance entre ces sommets est infinie.

Définition 2.10 (Diamètre d'un graphe)**.** On appelle *diamètre* d'un graphe connexe, la plus grande distance entre ses sommets.

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, on dit parfois que son diamètre est infini.

2.6 Graphes orientés

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : plan de ville, avec les sens interdits ; parcours en montagne, où il est utile d'indiquer le sens de montée ! Circuit électrique en courant continu, où il faut orienter les arêtes pour décider du signe de l'intensité : ce n'est pas la même chose de faire passer 10 ampères de A vers B ou de B vers A ; graphe d'ordonnancement, où les arêtes relient une tâche à une autre qui doit la suivre : on ne peut faire la peinture avant le plâtre.

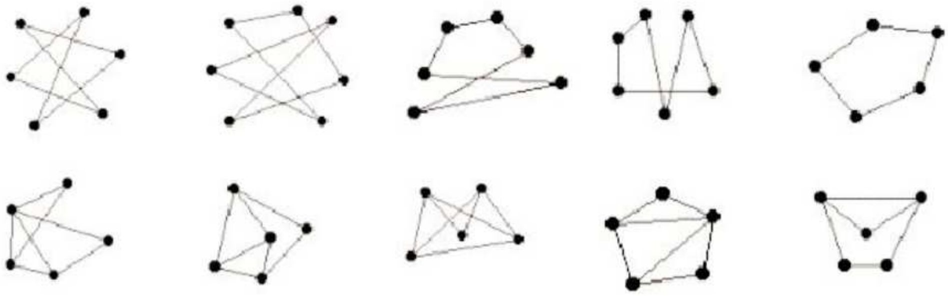
Définition 2.11. On appelle graphe orienté un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle va de l'une des ses extrémités, appelée *origine* ou *extrémité initiale* à l'autre, appelée *extrémité terminale*.

Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin. Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot « orienté » pour préciser ; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner.
En particulier, une chaîne orientée est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).

2.7 Exercices

EXERCICE 2.1.
Parmi les graphes de la figure 2.4 de la présente page, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.

FIGURE 2.4: Graphes de l'exercice 2.1



EXERCICE 2.2. • Dessiner les graphes complets K_n, pour $n = 2; 3; 4; 5$. Combien ont-ils d'arêtes ?
• Dessiner les graphes simples d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.

EXERCICE 2.3.
Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
• Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
• Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.
Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

EXERCICE 2.4.
Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

EXERCICE 2.5.
Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :
• 6-3-2-2-1-1-1
• 7-5-3-2-2-2-2-2

EXERCICE 2.6 (Associer un graphe à une situation)**.**
Comparer les trois graphes définis ci-dessous :
• on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;
• on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;
• les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;
• trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

EXERCICE 2.7.
1. Dessiner tous les graphes simples possible d'ordre n pour n variant de 1 à 4.
2. Lire graphiquement leur diamètre.
3. Caractériser les graphes de diamètre 1.

EXERCICE 2.8 (Diamètre d'un graphe)**.**
1. Quels sont les diamètres des graphes de la figure 2.5 page ci-contre ?
2. Quels sont les diamètres des graphes de la figure 2.6 page suivante ? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?

EXERCICE 2.9.
Quel est le diamètre du graphe donné par la figure 2.7 page ci-contre ?

FIGURE 2.5: Graphes de l'exercice 2.8, question 1

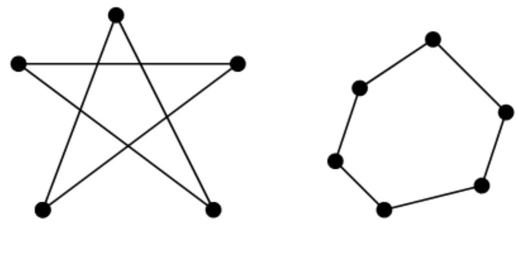


FIGURE 2.6: Graphes de l'exercice 2.8, question 2

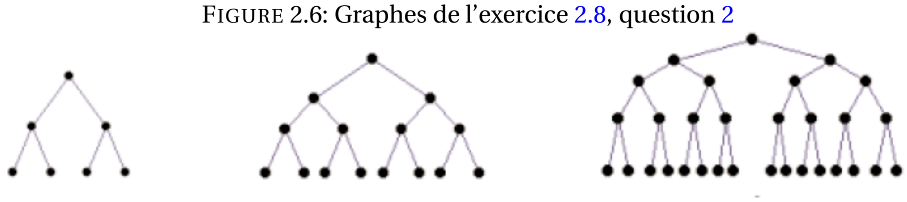
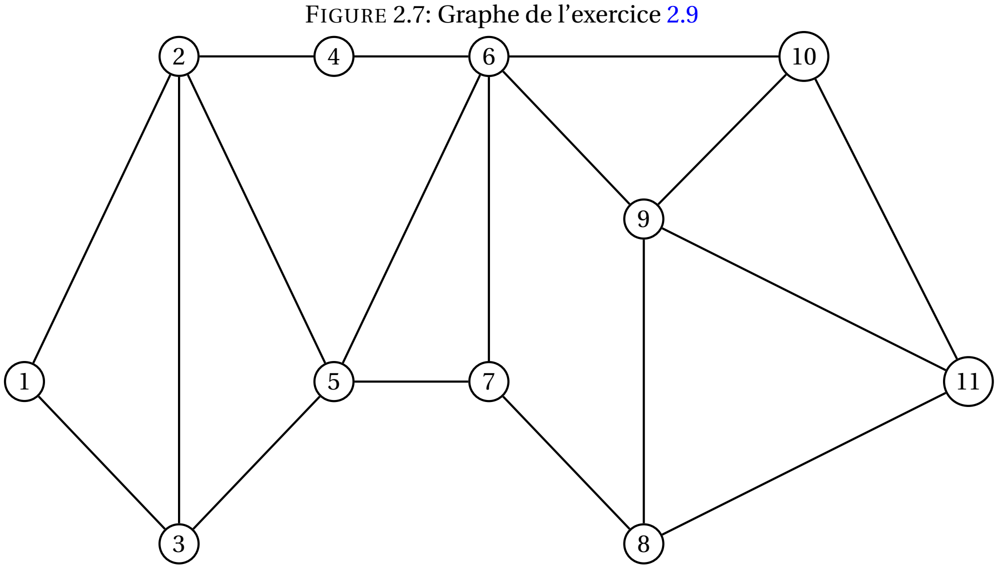


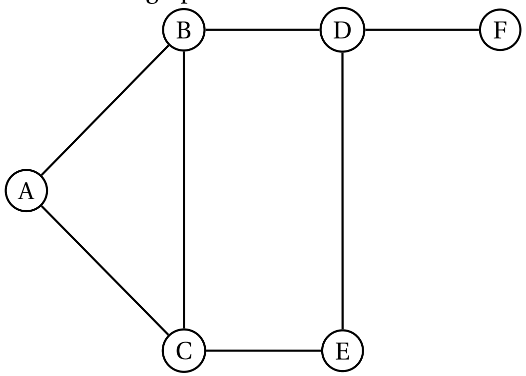
FIGURE 2.7: Graphe de l'exercice 2.9



Devoir surveillé n° 2

Graphes – Premières notions

EXERCICE 2.1 (7 points)**.**
On donne le graphe suivant :



1. Citer deux sommets adjacents et deux sommets non adjacents. *Justifier brièvement.*
2. Donner l'ordre du graphe. *Justifier brièvement.*
3. Donner le degré de chacun des sommets. *On pourra présenter sa réponse sous la forme d'un tableau.*
4. Citer un sommet pair et un sommet impair.
5. Le graphe est-il complet ? *Justifier brièvement.*
6. Le graphe contient-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? d'ordre 4 ? *Si oui donner les sommets par lesquels il est engendré.*
7. Le graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui donner les sommets par lesquels il est engendré.*
8. Construire le sous-graphe engendré par les sommets C, D et E.

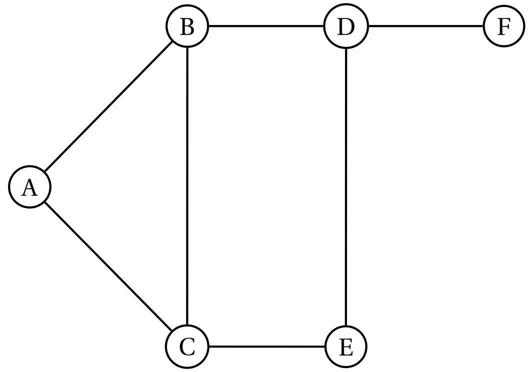
EXERCICE 2.2 (3 points)**.**
Est-il possible que dans un groupe de six personnes *(on justifiera chaque réponse)* :

1. quatre d'entre elles aient 4 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 6 amis ?
2. trois d'entre elles aient 5 amis, deux d'entre elles 3 amis et la dernière 2 amis ?
3. deux d'entre elles aient 3 amis, deux d'entre elles 2 amis et les deux dernières 1 ami ?

Devoir surveillé n° 2

Graphes – Premières notions

EXERCICE 2.1 (7 points)**.**
On donne le graphe suivant :



1. Citer deux sommets adjacents et deux sommets non adjacents. *Justifier brièvement.*
2. Donner l'ordre du graphe. *Justifier brièvement.*
3. Donner le degré de chacun des sommets. *On pourra présenter sa réponse sous la forme d'un tableau.*
4. Citer un sommet pair et un sommet impair.
5. Le graphe est-il complet ? *Justifier brièvement.*
6. Le graphe contient-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? d'ordre 4 ? *Si oui donner les sommets par lesquels il est engendré.*
7. Le graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui donner les sommets par lesquels il est engendré.*
8. Construire le sous-graphe engendré par les sommets C, D et E.

EXERCICE 2.2 (3 points)**.**
Est-il possible que dans un groupe de six personnes *(on justifiera chaque réponse)* :

1. quatre d'entre elles aient 4 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 6 amis ?
2. trois d'entre elles aient 5 amis, deux d'entre elles 3 amis et la dernière 2 amis ?
3. deux d'entre elles aient 3 amis, deux d'entre elles 2 amis et les deux dernières 1 ami ?

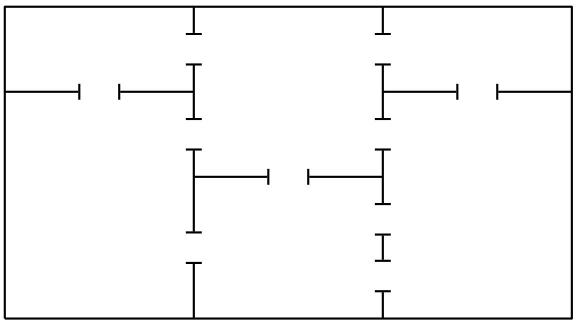
Chapitre 3

Graphes eulériens

Sommaire

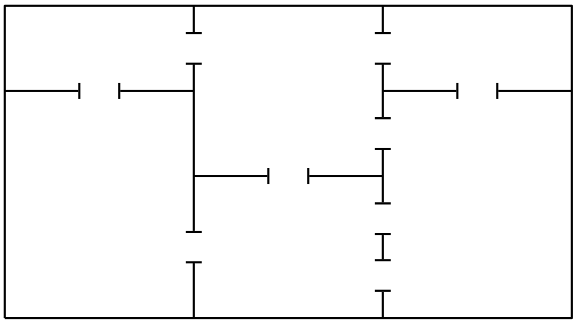
3.1 Quelques problèmes

PROBLÈME 3.1 (Au musée). 1. (a) Voici le plan du musée de la ville d'Izis :



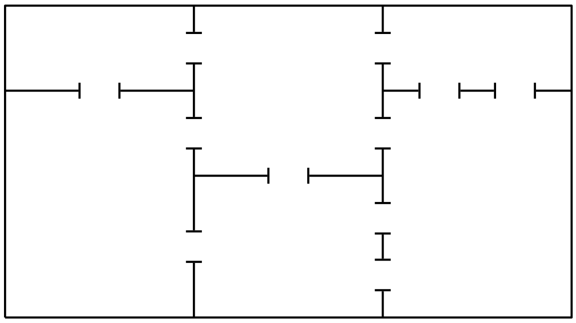
Un visiteur se promène et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.
Mais peut-il trouver un chemin passant une seule fois par chacune des portes ?
Peut-il trouver un circuit [1] passant une seule fois par chacune des portes ?

(b) Qu'en est-il du musée de la ville d'Oz donné ci-dessous ?

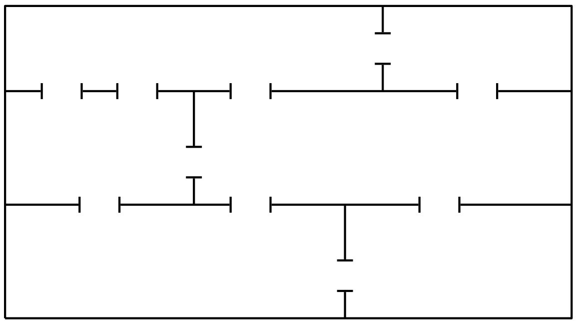


1. Un *circuit* est un chemin qui revient à son point de départ.

(c) Qu'en est-il du musée de la ville d'Aza donné ci-dessous ?

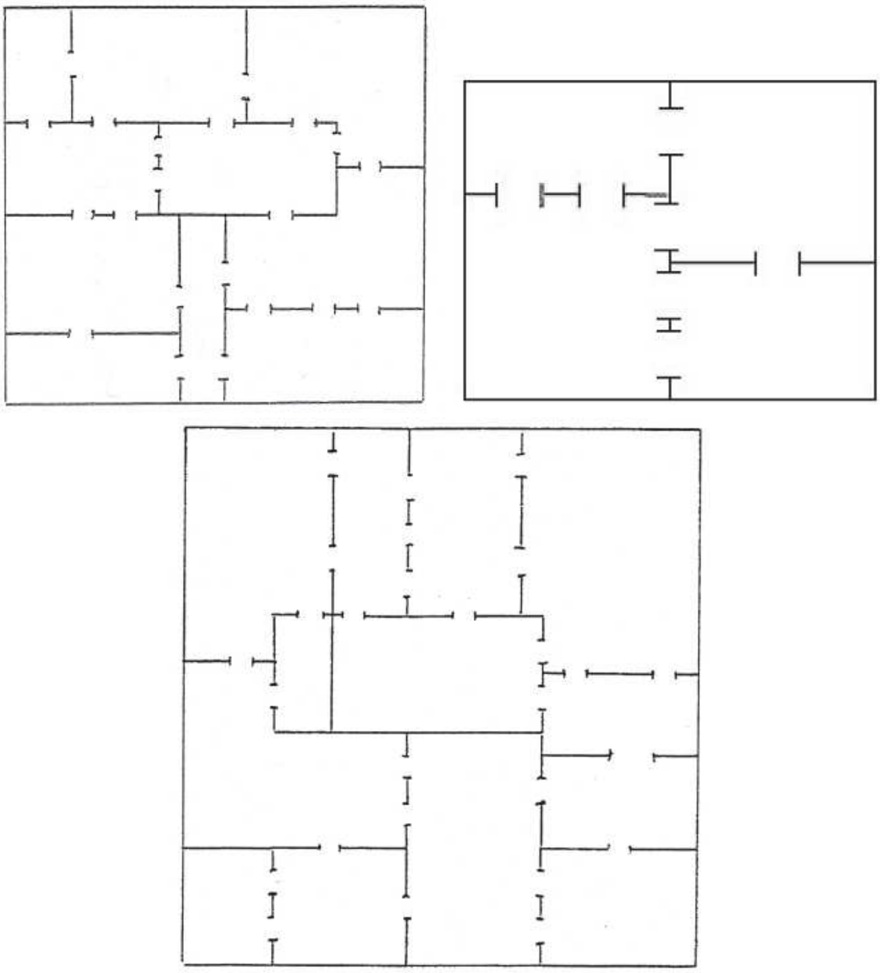


(d) Qu'en est-il du musée de la ville d'Ezé donné ci-dessous ?



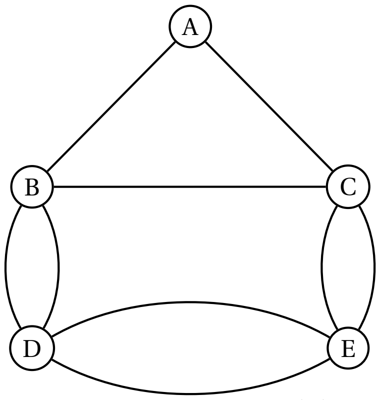
2. (a) Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous émettre ?
   (b) Vérifier ces conjectures sur les musées de la figure 3.1 de la présente page.

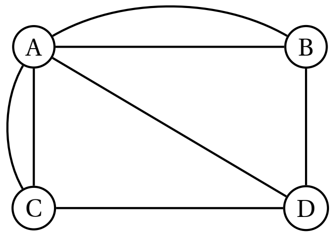
FIGURE 3.1: Musées de la question 2b



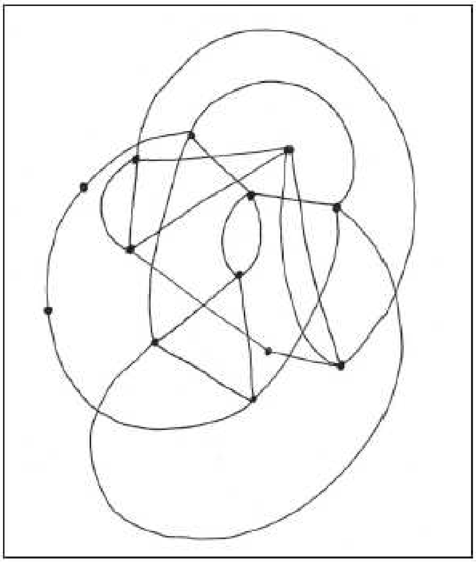
PROBLÈME 3.2 (Avec des graphes).

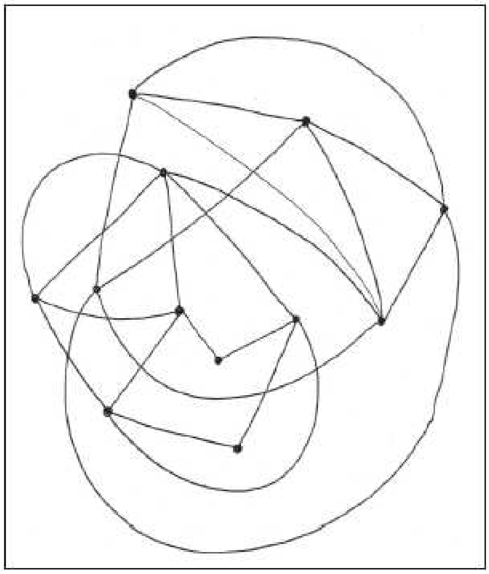
1. Pour chacun des graphes, existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes ? Expliquez pourquoi.



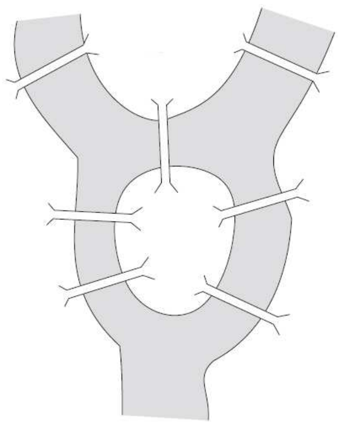


2. Vérifier si vos conjectures sont valides sur les graphes ci-dessous.

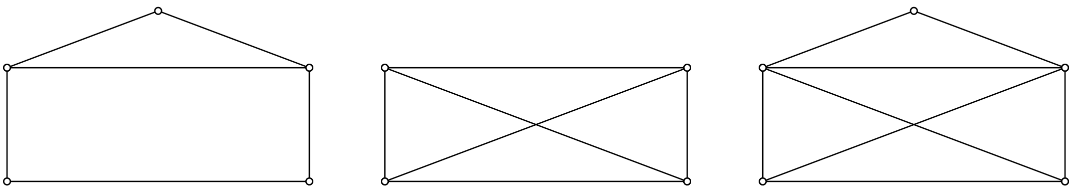




PROBLÈME 3.3 (Les sept ponts de Königsberg).
Le problème qui suit est, selon la légende[2], à l'origine de l'invention des graphes par EULER, qui résidait à Königsberg. Au XVIIIe siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche.
La ville de Königsberg comprenait sept ponts, disposés selon le schéma de la figure ci-contre.
Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont.
Comment faire ?



PROBLÈME 3.4 (Les enveloppes).
Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes de la figure ci-dessous ?



2. EULER a bien trouvé la solution générale de ce type de problèmes mais sans utiliser les graphes et, s'il a prouvé dans quels cas un tel trajet était impossible, il n'a pas prouvé pourquoi dans les autres cas c'est toujours possible.

3.2 Bilan et compléments

Cela nous amène à définir :

Définition 3.1 (Chaîne eulérienne)**.** Une chaîne est *eulérienne* si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si la chaîne est un cycle (sommet de départ et de fin confondus), on l'appelle *cycle eulérien*.

Le théorème suivant, dit théorème d'EULER, qu'on admettra, est à l'origine de la théorie des graphes :

Théorème 3.1 (d'EULER)**.** *Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux.*

De façon plus précise :
- si le graphe n'a pas de sommet impair, alors il a un cycle eulérien ;
- le graphe ne peut avoir un seul sommet impair ;
- si le graphe a deux sommets impairs, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

La propriété suivante, conséquence immédiate du théorème, est souvent utile :

Propriété 3.2. *Un graphe connexe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.*

Ces résultats permettent de résoudre beaucoup de problèmes pratiques se traitant en théorie des graphes.

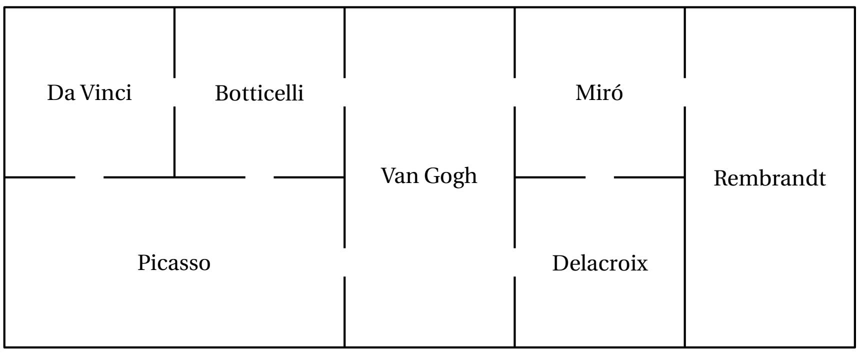
3.3 Exercices

EXERCICE 3.1.
À l'aide du théorème ou de la propriété, déterminer ceux des problèmes présentés plus haut qui n'ont pas de solution et, si cela n'a pas été déjà fait, trouver les solutions des autres.

EXERCICE 3.2.
On construit un musée dont les pièces sont disposées comme indiqué sur la figure 3.2 de la présente page (les entrées et sorties du musée ne sont pas crées).

1. Montrer qu'il est impossible d'organiser un parcours dans ce musée qui emprunterait une et une seule fois chaque passage entre deux salles.
2. Quel passage doit-on condamner, ou quel passage doit-on créer pour qu'un tel trajet soit possible ?
   Dans quelle(s) pièce(s) doit-on alors créer l'entrée et la sortie du musée ?

FIGURE 3.2: Figure de l'exercice 3.2



EXERCICE 3.3.
Cinq pays sont représentés (schématiquement) avec leurs frontières sur la figure 3.3 page suivante. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

EXERCICE 3.4.
La carte de la figure 3.4 page ci-contre est celle des régions françaises. Est-il possible de parcourir la France en passant une et une seule fois par toutes les frontières entre les régions ?

EXERCICE 3.5.
On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimun faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

FIGURE 3.3: Problème des frontières

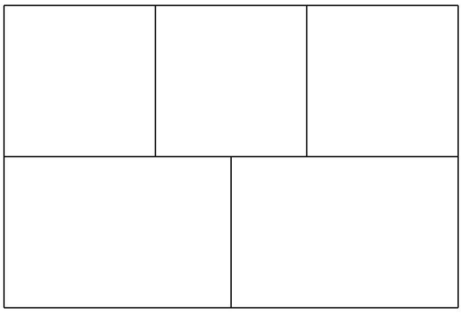


FIGURE 3.4: Les régions de France

Devoir surveillé n° 3

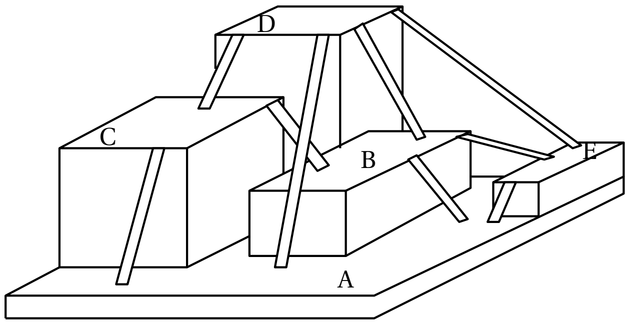
Graphes eulériens

EXERCICE 3.1.
On considère un espace de jeu réservé à des enfants.

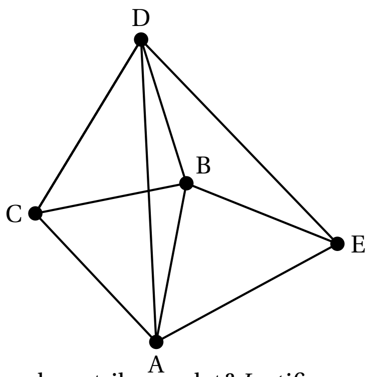
Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E.

A est la plate-forme de départ.

Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-contre.



Partie A
On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-dessous où une plate-forme est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.



1. Ce graphe est-il complet ? *Justifier.*
2. Ce graphe est-il connexe ? *Justifier.*
3. Ce graphe contient-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? Et d'ordre 4 ? *Si la réponse est oui, on indiquera les sommets par lequel ce sous-graphe est engendré.*
4. Ce graphe contient-il une chaine eulérienne ? *Justifier.*

Partie B
Une étude a montré que sur ce genre de structure les déplacements des usagers étaient plus ou moins fluides et a classé ces structures en trois catégories :

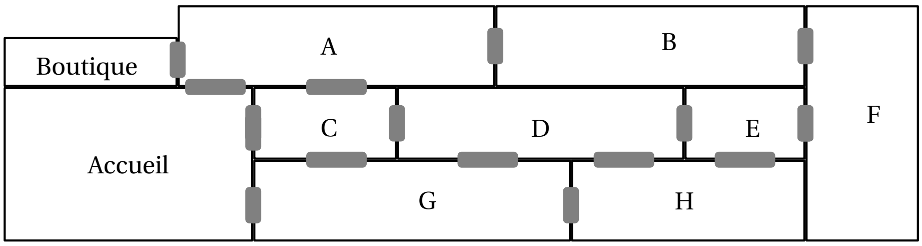
Catégorie 1 : déplacements très peu fluides ; c'est le cas lorsque, sur la structure, il n'existe pas de trajet permettant d'emprunter une et une seule fois chaque rampe.

Catégorie 2 : déplacements assez fluides ; c'est le cas lorsque, sur la structure, il existe au moins un trajet permettant d'emprunter une et une seule fois chaque rampe mais que ce trajet ne démarre pas sur la plate-forme de départ.

Catégorie 3 : déplacements très fluides ; c'est le cas lorsque, sur la structure, il existe au moins un trajet permettant d'emprunter une et une seule fois chaque rampe et que ce trajet démarre sur la plate-forme de départ.

Déterminer dans quelle catégorie est la structure et, si jamais elle n'est pas dans la catégorie 3, proposer une modification simple permettant qu'elle soit dans cette catégorie.

EXERCICE 3.2.
Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.



1. Est-il possible de trouver un trajet où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ? *On justifiera très rigoureusement.*
2. Si oui, donner un tel trajet ; si non proposer une modification simple du musée permettant un tel trajet.

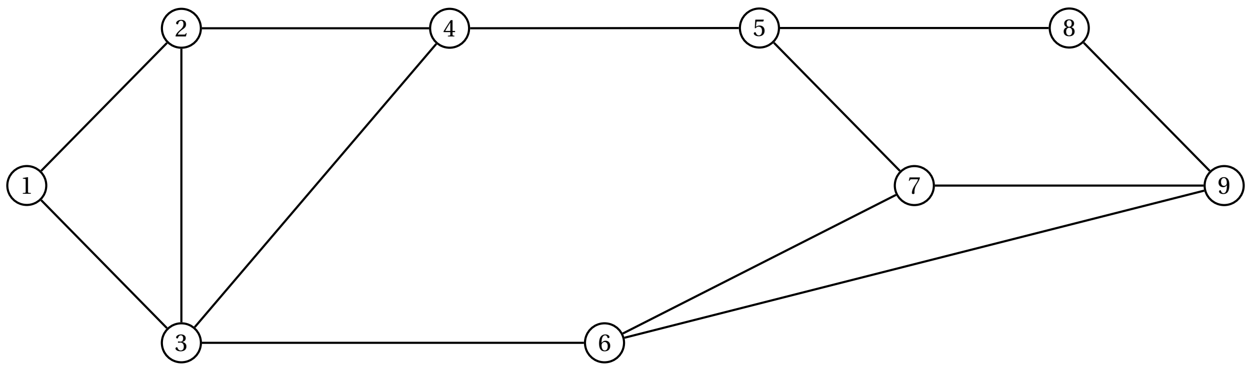
Chapitre 4

Comptage de chaînes

Sommaire

4.1 Un problème

Sébastien se rend régulièrement en train de la ville U (sommet 1) à la ville V (sommet 9), dans un réseau donné par le graphe ci-dessous. Il fait toujours le trajet en 5 étapes, et veut faire à chaque fois un chemin différent. Combien de trajets pourra-t-il faire ?



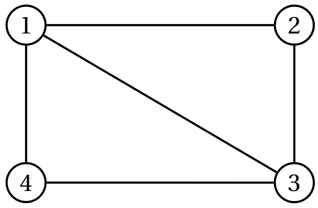
4.2 Une solution

Comme on l'a vu précédemment, si l'on essaie une énumération complète de tous les chemins de longueur 5 de U à V, on se rend vite compte qu'il est difficile de ne pas en oublier. Il faut trouver un moyen systématique de faire l'énumération. La solution passe par les matrices.

4.2.1 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 4.1. Soit G un graphe qui possède n sommets numérotés de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A=(a_{i;j})$, où $a_{i;j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet de numéro i au sommet de numéro j.

Exemple 4.1. Le graphe G ci-dessous a la matrice d'adjacence A ci-contre.



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. L'allure de la matrice d'adjacence donne des indications sur la nature du graphe :

- La matrice d'adjacence d'un graphe sans boucle n'a que des 0 sur la diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe sans arête parallèle n'a que des 1 ou des 0.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe complet n'a que des 1, hormis sur sa diagonale où il y a des 0.

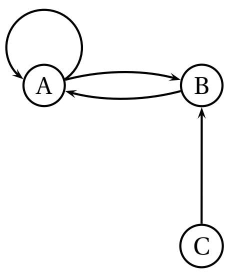
Cas d'un graphe orienté

On a vu que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. Il n'en va pas de même pour celle d'un graphe orienté car si une arête a pour extrémité initiale le sommet A et pour extrémité finale le sommet B, il n'en existe pas forcément une allant de B vers A, aussi dans ce cas le coefficient correspondant aux arêtes allant de A vers B ne sera pas le même que le coefficient correspondant aux arêtes allant de B vers A.
On donc doit convenir d'un sens de lecture pour la matrice d'un graphe orienté. La matrice

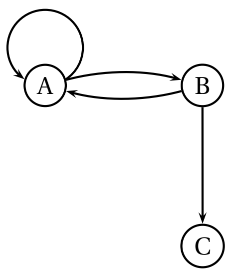
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

peut correspondre à l'un ou l'autre des graphes ci-dessous selon qu'on choisit de lire les extrémités initiales en ligne ou en colonne :

En ligne



En colonne



On convient alors de la chose suivante :

Définition 4.2. Par convention, dans la matrice d'adjacence d'un graphe G orienté, le terme a_{ij} (i-ième ligne, j-ième colonne) désigne le nombre d'arêtes d'origine le sommet i et d'extrémité finale le sommet j.

4.2.2 Puissances de la matrice d'adjacence d'un graphe

ACTIVITÉ 4.1.
Considérons le graphe G de l'exemple 4.1.

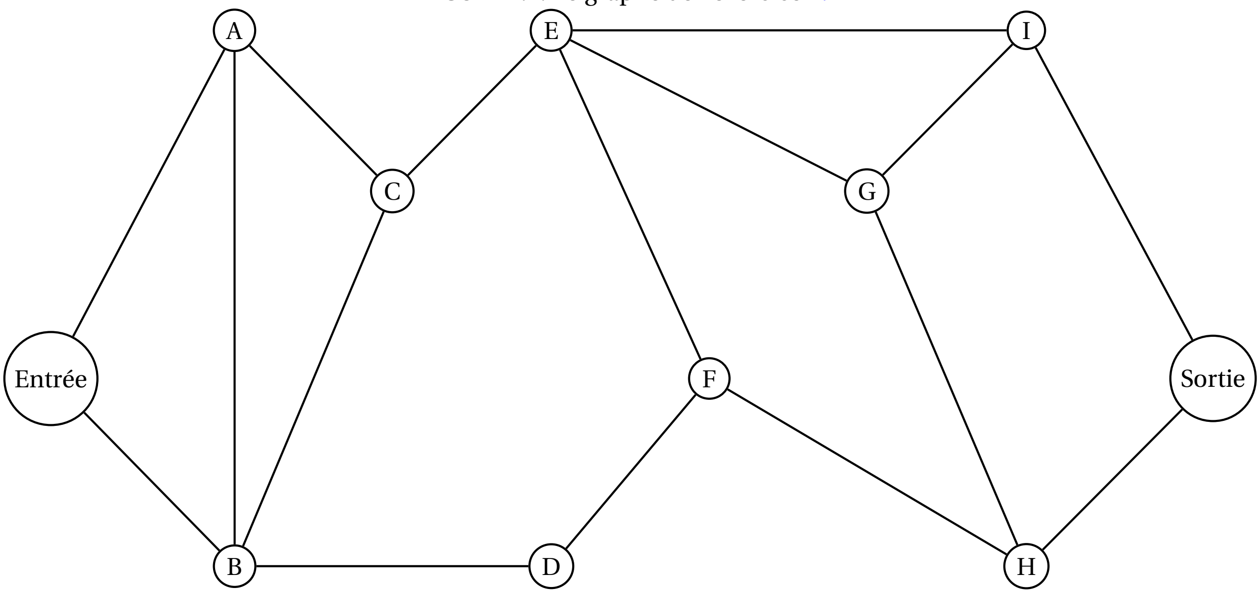
1. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 entre deux sommets quelconques et présenter les résultats sous forme de matrice.
2. À la calculatrice, obtenir A^2. Que constate-t-on ?
3. Le résultat précédent étant vrai dans le cas général, résoudre, à l'aide des matrices, le problème d'introduction.

Théorème 4.1 (admis)**.** *Soit G un graphe de matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i; j de la matrice* A^n.

4.3 Exercices

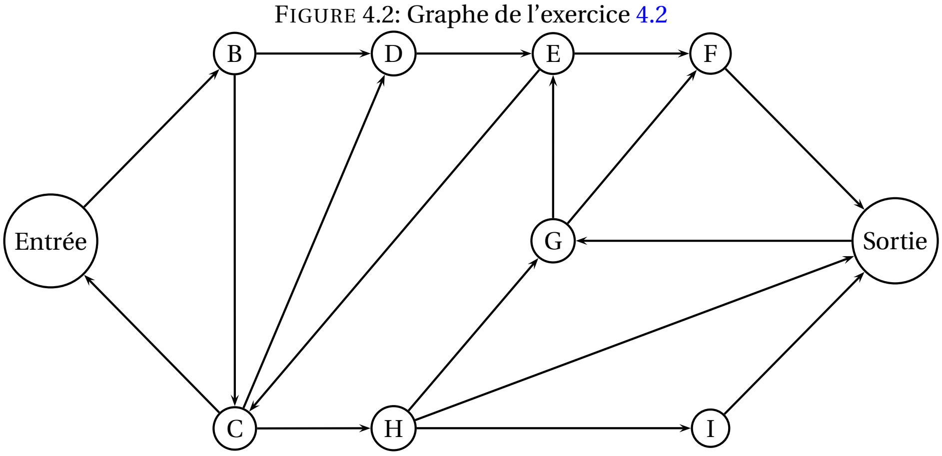
EXERCICE 4.1.
Quel est le nombre de chaînes de longueur 6 entre l'entrée et la sortie du graphe donné par la figure 4.1 de la présente page ?

FIGURE 4.1: Le graphe de l'exercice 4.1



EXERCICE 4.2.
La figure 4.2 de la présente page donne un graphe représentant un plan de circulation du centre-ville de Neverland.

FIGURE 4.2: Graphe de l'exercice 4.2



1. Quel est le nombre de manières d'aller en voiture de l'entrée à la sortie en 10 étapes ?
2. Et à pied ?

EXERCICE 4.3.
Représenter le graphe G dont la matrice d'adjacence est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.4.
On donne A la matrice d'adjacence d'un graphe G ainsi que quelques-unes de ses puissances ci-dessous. Sans tracer le graphe répondre aux questions.

1. Quel est l'ordre de G ?
2. G est-il un graphe orienté ?
3. (a) Quel est le degré du sommet 3 ?
   (b) Le graphe est-il eulérien ?
4. Combien de chaînes de longueur 4 relient les sommets 2 et 5 ?
5. Pourquoi y a-t-il forcément une erreur dans la matrice A^5 ?
6. (a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 7 ?
   (b) Quel est le diamètre de G ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

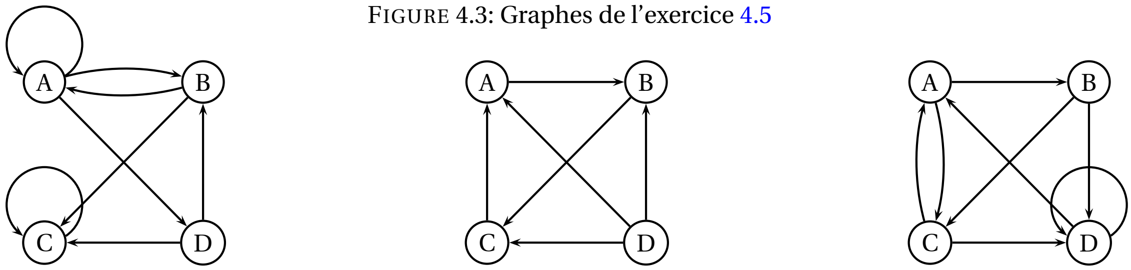
$$A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 9 & 18 & 5 & 5 & 2 \\ 13 & 28 & 21 & 15 & 25 & 12 & 13 & 3 \\ 11 & 21 & 21 & 16 & 18 & 11 & 12 & 2 \\ 9 & 15 & 16 & 13 & 15 & 9 & 10 & 2 \\ 18 & 25 & 18 & 15 & 38 & 13 & 13 & 7 \\ 5 & 12 & 11 & 9 & 13 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 13 & 12 & 10 & 13 & 9 & 14 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 7 & 6 & 9 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 9 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 7 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 7 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 24 & 49 & 42 & 31 & 43 & 23 & 25 & 5 \\ 49 & 74 & 66 & 53 & 89 & 38 & 40 & 13 \\ 42 & 66 & 50 & 39 & 81 & 30 & 31 & 12 \\ 31 & 53 & 39 & 30 & 63 & 25 & 26 & 10 \\ 43 & 89 & 81 & 63 & 84 & 51 & 58 & 13 \\ 23 & 38 & 30 & 25 & 51 & 22 & 27 & 9 \\ 25 & 40 & 31 & 26 & 58 & 27 & 24 & 14 \\ 5 & 13 & 12 & 10 & 13 & 8 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.5.
Pour chacun des graphes de la figure 4.3 de la présente page donner sa matrice d'adjacence.

FIGURE 4.3: Graphes de l'exercice 4.5



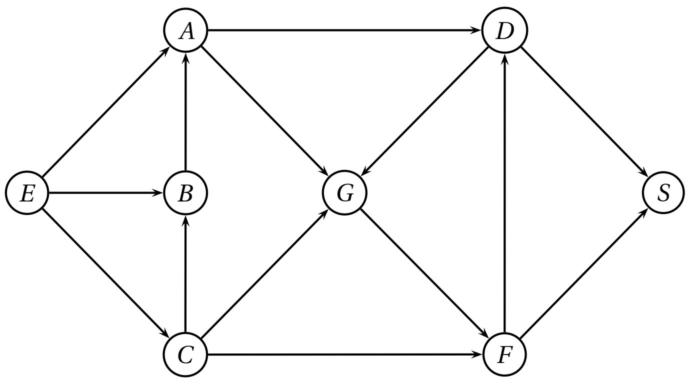
EXERCICE 4.6.
Pour chacune des matrices suivantes, dessiner le graphe associé.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.7.
Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne, sur la figure ci-dessous, le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).
Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on a :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2
La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6
La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
Combien de traversées peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?
Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.



Devoir surveillé n° 4

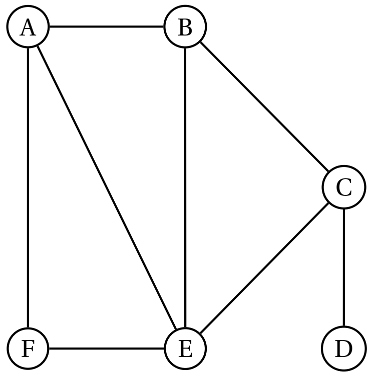
Comptage de chaînes

EXERCICE 4.1 (2 points)**.**
La matrice M ci-dessous est la matrice d'adjacence d'un graphe G :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Construire le graphe G.

EXERCICE 4.2 (5 points)**.**
On donne le graphe G ci-dessous :



1. Répondre aux questions suivantes en justifiant brièvement :
   (a) Ce graphe est-il complet ?
   (b) Ce graphe est-il connexe ?
   (c) Ce graphe est-il eulérien ?
2. (a) Donner sa matrice d'adjacence M, les sommets étant considérés dans l'ordre alphabétique.
   (b) Donner le nombre de chaînes de longueur 4 entre les sommets A et D en expliquant comment ce nombre a été obtenu puis donner la liste de ces chaînes.

EXERCICE 4.3 (8 points)**.**
On donne la matrice d'adjacence M d'un graphe G et quelques unes de ses puissances. Répondre aux questions suivantes, en justifiant vos réponses soigneusement <u>uniquement</u> à l'aide des matrices données.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 & 4 & 13 & 8 & 8 \\ 9 & 23 & 9 & 15 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 8 & 15 & 2 & 6 & 2 \\ 13 & 4 & 7 & 2 & 11 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'ordre du graphe G ?
2. Ce graphe est-il orienté ?
3. Quel est de degré du sommet 3 ?
4. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Une chaîne eulérienne ?
5. Quelle est la distance entre le sommet 2 et le sommet 7 ?
6. Quel est le diamètre de G ?
7. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 qui partent du sommet 6 et qui y reviennent ?
8. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 qui partent du sommet 3 et qui n'y reviennent pas ?

Chapitre 5

Colorations de graphes

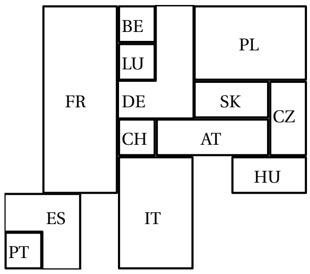
Sommaire

5.1 Problèmes

Problème 5.1 (Un problème d'aquariophile)**.**
A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, un X signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium.
Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X					X	X	X
D	X				X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Problème 5.2 (Colorier une carte)**.**
On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous, qui est la carte schématisée d'une partie de l'Europe, de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur.
Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent.



PROBLÈME 5.3 (Organisation d'un tournoi).
Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrabble (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et mastermind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.

1. Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?
2. En sachant que chaque tournoi doit durer au maximum 3 heures, proposer un horaire des tournois nécessitant une durée minimale et respectant bien sûr les choix des participants.

5.2 Bilan et compléments

5.2.1 Coloration d'un graphe et nombre chromatique

Les problèmes ci-dessus peuvent tous se ramener à un problème de coloration de graphe.

Définition 5.1. Une coloration d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle manière que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Remarque. Il s'agit simplement d'un moyen de donner un contenu intuitif à une notion utile dans des contextes très variés. Dans les problèmes, cet ensemble de couleurs peut être un ensemble de tranches horaires dans lesquelles on doit faire tenir diverses occupations de façon compatible, de cages de zoo dans lesquelles il ne faut pas mettre des animaux qui vont s'attaquer, de salles de classes dans lesquelles on veut organiser des options, etc.
Une grande partie de la difficulté tient ici dans le travail de modélisation, pour faire apparaître la question comme un problème de coloriage. En particulier, la contruction du graphe n'est pas toujours évidente : pour les problèmes de coloriage de carte, comme on l'a vu dans l'exercice sur la carte de l'Europe, c'est le graphe directement induit qu'il faut considèrer. Dans les problèmes de compatibilité, ce ne sont pas les sommets compatibles qu'il faut relier sur le graphe, comme on a spontanément tendance à le faire, mais les sommets incompatibles.

Définition 5.2. Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration. On note généralement $\gamma(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G.

On ne connaît pas de formule miracle permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps il faut se contenter d'un encadrement, autrement dit d'un minorant et d'un majorant du nombre chromatique.
On a intérêt bien sûr à ce que le minorant soit le plus grand possible et que le majorant soit le plus petit possible. Si par hasard le minorant et le majorant sont les mêmes, on a gagné puisqu'on a alors le nombre chromatique du graphe.

5.2.2 Minorant du nombre chromatique

Quelques remarques simples permettent de minorer ce nombre chromatique.

Propriété 5.1. *Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G on a :* $\gamma(H) \leqslant \gamma(G)$

Preuve. Une coloration de G avec $\gamma(G)$ couleurs induit une coloration de H avec au plus $\gamma(G)$ couleurs. ◊

Propriété 5.2. *Le nombre chromatique du graphe complet K_n est n.*

Preuve. Les sommets étant tous adjacents, il faut autant de couleurs qu'il y a de sommets. ◊

Propriété 5.3. *Soit G un graphe. Si G contient un sous-graphe complet d'ordre n, alors* $\gamma(G) \geqslant n$.

Preuve. C'est la conséquence évidente des deux précédentes propriétés. ◊

5.2.3 Majorant du nombre chromatique

Il est plus difficile de prouver des majorations générales du nombre chromatique.
Deux propriétés sont disponibles, mais elles donnent souvent des majorations trop larges :

Propriété. *Soit G un graphe d'ordre n, alors* $\gamma(G) \leqslant n$.

Preuve. Cette propriété est triviale : si on donne une couleur différente à chacun des sommets de G, on obtient une coloration de G. ♢

Cette propriété donne un majorant du nombre chromatique qui est mauvais. La suivante, qu'on admettra, donne un meilleur majorant, aussi nous n'utiliserons que celle-là :

Propriété 5.4. *Considérons un graphe G et soit r le plus grand des degrés des sommets. Alors :* $\gamma(G) \leqslant r+1$

Pour en obtenir de meilleurs majorants, il faut avoir une stratégie pour colorier un graphe, stratégie qu'on appellera *algorithme de coloration.*

Un algorithme de coloration

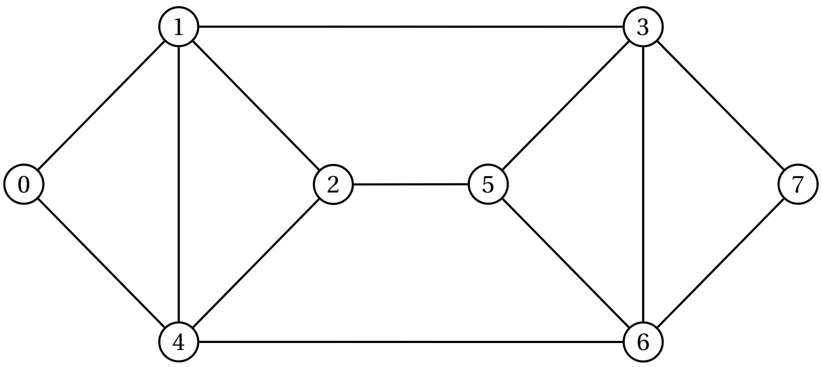
Nous allons décrire ci-après l'algorithme de coloration de WELCH et POWELL.

1. On classe d'abord les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient ainsi une liste x_1 ; x_2 ; ... ; x_n de sommets telle que $deg(x_1) \geqslant deg(x_2) \geqslant \ldots \geqslant deg(x_n)$.
2. On choisit une couleur c_1 pour le sommet x_1, et :
   - en parcourant la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 au premier sommet non colorié et non adjacent à c_1 ;
   - en continuant à parcourir la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 aux autres sommets non coloriés et non adjacents aux sommets déjà coloriés avec c_1 et, ce, jusqu'à la fin de la liste.
3. S'il reste des sommets non coloriés, on attribue une nouvelle couleur au premier sommet non colorié et on reprend la démarche.
4. On s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés.

Remarque. C'est un bon algorithme, mais précisons quand même que le nombre de couleurs utilisé par cet algorithme n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe. L'exemple qui suit illustre cela. De plus, on remarquera qu'une partie de l'algorithme n'est pas entièrement déterminée : en effet, s'il y a plusieurs sommets de même degré, l'ordre dans lequel on les range est arbitraire, donc deux personnes appliquant cet algorithme au même graphe n'obtiendront pas forcément le même coloriage.

5.2.4 Un exemple

Considérons le graphe G dessiné ci-dessous.



Appliquons l'algorithme décrit ci-dessus : 1, 3, 6, 4, 2, 5, 0, 7 est une liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés.
D'après l'algorithme :

- à la première étape on attribue une couleur c_1 aux sommets 1 et 6 ;
- à la deuxième étape, on attribue une couleur c_2 aux sommets 3 et 4 ;
- à la troisième étape, on attribue une couleur c_3 aux sommets 2, 0 et 7 ;
- enfin à la dernière étape on attribue une couleur c_4 au sommet 5.

Un tel algorithme peut se présenter sous forme de tableau :

Sommets (degré)	1 (4)	3 (4)	6 (4)	4 (4)	2 (3)	5 (3)	0 (2)	7 (2)
Étape 1	c_1		c_1					
Étape 2		c_2		c_2				
Étape 3					c_3		c_3	c_3
Étape 4						c_4		

On obtient un coloriage de G avec 4 couleurs, mais en fait le nombre chromatique de G est 3. En effet deux couleurs ne suffisent pas car G admet des triangles comme sous-graphes, c'est-à-dire des sous-graphes complets d'ordre 3, par contre, en prenant du bleu pour les sommets 0, 2 et 3, du rouge pour les sommets 4, 5 et 7 et du jaune pour les sommets 1 et 6, on obtient un coloriage avec 3 couleurs.
On a alors $\gamma(G) \geqslant 3$ car G contient un sous-graphe d'ordre 3 et $\gamma(G) \leqslant 3$ car on a mis en évidence une coloration de G à l'aide de 3 couleurs donc on a bien $\gamma(G) = 3$.
La morale de tout cela est que pour un petit nombre de sommets, il faut chercher directement le nombre chromatique plutôt que d'utiliser tel ou tel algorithme, même si à l'épreuve du baccalauréat on attend de vous que vous mettiez en évidence un algorithme de coloriage.

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1 (Produits chimiques)**.**
On veut transporter dans un train des produits chimiques. Pour des raisons de sécurité, on ne mettra pas certains produits chimiques dans le même wagon.
On appelle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 les produits chimiques et on indique dans le tableau ci-dessous les produits incompatibles (notés par un X).
Combien de wagons faudra-t-il prévoir ?

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1		X		X		
P_2	X		X		X	
P_3		X		X		
P_4	X		X			
P_5		X				X
P_6					X	

EXERCICE 5.2 (Organisation d'un examen)**.**
On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont : F-A-M ; D-S ; I-S ; I-M.

1. Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

EXERCICE 5.3 (Menuiserie)**.**
Dans un atelier de menuiserie, six travaux sont à réaliser. On utiliser quatre machines : une scie à dégrossir ; une raboteuse ; une mortaiseuse ; une ponceuse. Chaque travail nécessite l'utilisation de deux machines, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Plan des utilisations	
Travail	Machines utilisées
1	Scie et raboteuse
2	Scie et mortaiseuse
3	Mortaiseuse et ponceuse
4	Raboteuse et ponceuse
5	Mortaiseuse et ponceuse
6	Scie et mortaiseuse

Deux travaux ne peuvent être exécutés en même temps que s'ils utilisent des machines différentes.

1. Certains travaux ne peuvent être réalisés en même temps. Représenter ces contraintes par un graphe.
2. On suppose que le temps nécessaire pour chaque travail est le même (une séquence de 20 min).
   Déterminer le nombre minimal de séquences nécessaires pour réaliser ces six travaux.
3. Proposer une organisation.

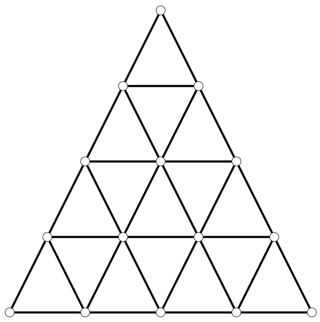
EXERCICE 5.4 (Habillement)**.**
Aujourd'hui Nathalie est perplexe : que mettre pour cet entretien d'embauche ?
Dans son armoire, elle a : 3 pulls, 3 jupes, 3 paires de chaussures à assortir.
Elle ne peut pas mettre plusieurs pulls, plusieurs jupes ou plusieurs paires de chaussures et, par ailleurs, il y a des incompatibilités qui sont donnés dans le tableau suivant, où p_1, p_2, p_3 désignent les trois pulls, j_1, j_2, j_3, les trois jupes, c_1, c_2, c_3 les trois paires de chaussures.

	ne peut aller avec
p_1	j_1, c_2, j_3
p_2	c_1, j_2, c_3, j_3
p_3	j_1, j_2, c_2
j_1	p_1, p_3, c_3, c_1
j_2	p_2, p_3, c_1, c_2
j_3	p_1, p_2, c_1

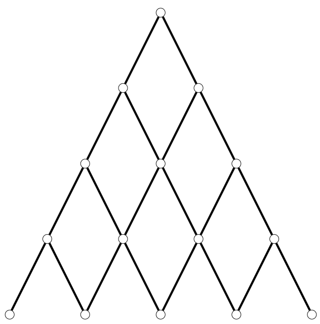
1. Représenter ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les vêtements sont les sommets.
2. Colorier ce graphe.
3. En déduire toutes les possibilités d'assortiments compatibles.

EXERCICE 5.5 (Ouverture de magasins)**.**
Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.
Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

EXERCICE 5.6 (Coloration de graphes)**.**
1. Montrer que le nombre chromatique du graphe G ci-dessous vaut 3.
   Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?
2. Montrer que le nombre chromatique du graphe H ci-dessous vaut 2.



G

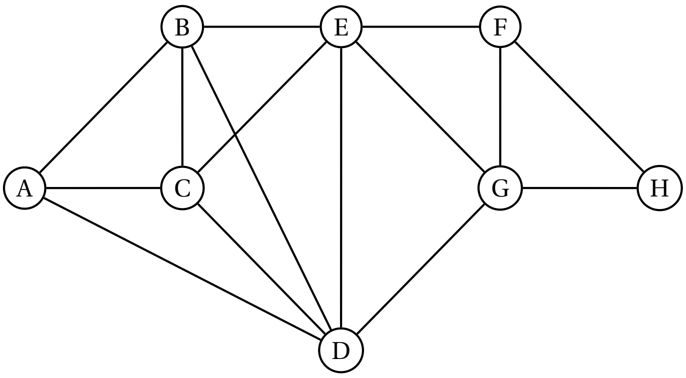


H

Devoir surveillé n° 5

Coloration

EXERCICE 5.1.
La tournée de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier » est représentée par le graphe ci-dessous où les sommets sont des carrefours de la ville et les arêtes sont des voies de circulation où la collecte est programmée pour cette tournée. Le dépôt d'où démarre le camion est situé au carrefour A.



1. (a) Ce graphe est-il complet ? *Justifier.*
   (b) Ce graphe est-il connexe ? *Justifier.*
2. Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les carrefours du graphe représentant sa tournée de manière à ce que deux carrefours reliés par une même voie n'aient jamais la même couleur.
   (a) Peut-il utiliser seulement trois couleurs ? Justifier.
   (b) En utilisant un algorithme de coloration, déterminer un majorant du nombre minimum de couleurs à utiliser.
   (c) Déterminer le nombre minimum de couleurs à utiliser.
3. On appelle M la matrice associée au graphe, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 34 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

   (a) Expliquer, à l'aide de la matrice, pourquoi le diamètre de ce graphe est inférieur ou égal à 4.
   (b) Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt situé au carrefour A au carrefour H en quatre étapes ? *Justifier la réponse.*
4. Le conducteur du camion doit passer le long de chacune des voies indiquées afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il commence sa tournée au dépôt situé au carrefour A et doit terminer à l'usine de recyclage située au carrefour E. Il cherche le chemin qui minimise son trajet.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de parcours permettant de longer une seule fois chaque voie.
   (b) Proposer une modification simple de son parcours qui lui permette de le faire (*on pourra imaginer qu'il existe autant de voies que l'on veut qui ne sont pas indiquées sur le schéma*) et donner alors son parcours.

Chapitre 6

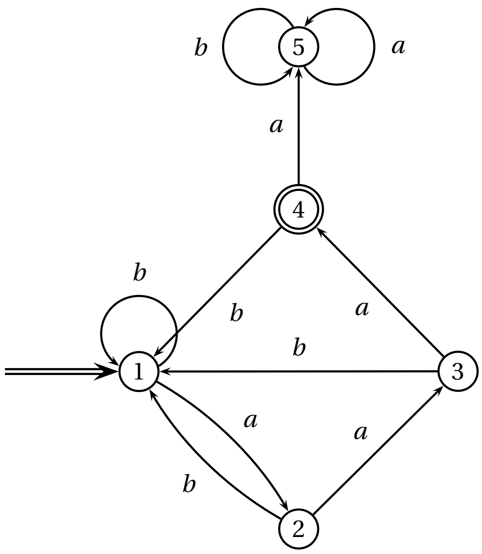
Graphes étiquetés

Sommaire

6.1 Quelques exemples

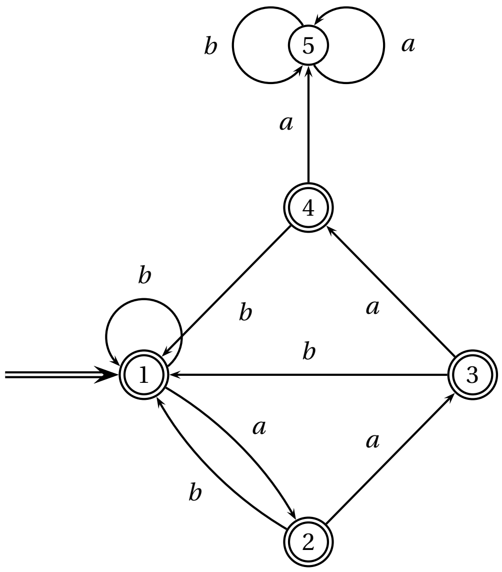
6.1.1 Le jeu du labyrinthe

Nous allons commencer par un jeu : on a représenté ci-dessous le plan d'un petit labyrinthe. Ce labyrinthe possède 5 salles, numérotées de 1 à 5 ; au départ, on est dans la salle 1, indiquée par une flèche. Les salles qui ouvrent sur l'extérieur sont entourées par un double rond ; ici il n'y en a qu'une, c'est la salle 4. De chaque salle partent des couloirs à sens unique, portant une lettre (a ou b), et allant à une autre salle (ou parfois revenant à la même salle, comme dans le cas de la salle 5).



Au début du jeu, on vous remet une suite de lettre, par exemple $abaab$. En lisant ces lettres l'une après l'autre, on suit un chemin partant de la salle 1 dans le labyrinthe. Si, après avoir lu toute la suite, on est dans une salle qui ouvre sur l'extérieur, on a gagné, sinon, on a perdu.
Par exemple, à la suite $abaab$ correspond le chemin qui part de la salle 1 et parcourt les salles 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 1. Comme la salle 1 n'ouvre pas sur l'extérieur, on a perdu. Par contre, au mot $abaaa$ correspond le chemin 1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 : ce mot est gagnant.
On peut se poser deux types de questions au sujet de ce labyrinthe : tout d'abord, un mot étant donné, est-il gagnant ou perdant ? Ensuite, plus généralement, peut-on caractériser simplement les mots gagnants ?

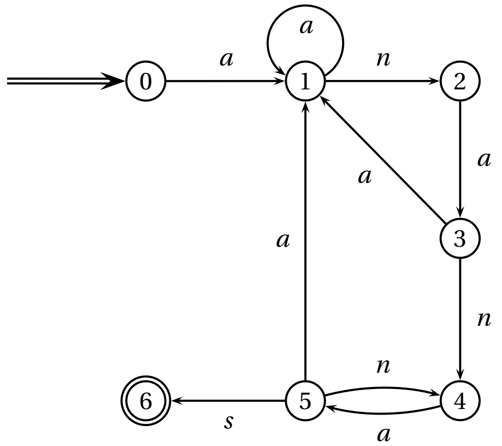
On vient de voir comment vérifier si un mot est gagnant. Il n'est en fait pas très difficile de les caractériser tous. On voit d'abord que, si on est dans la salle 5, on ne peut plus en sortir, et donc on a perdu. Quand on est dans les autres salles, dès qu'on lit un b, on revient en salle 1 ; ensuite, si on lit un a, on arrive en salle 2, si on lit aa, on arrive en salle 3, si on lit aaa, on arrive en salle 4, et si on lit $aaaa$, on arrive en salle 5. Un peu de réflexion montre que les mots gagnants sont exactement les mots qui ne contiennent pas $aaaa$ et qui finissent par aaa.
Pouvez-vous caractériser les mots gagnants pour le labyrinthe suivant, petite modification du premier, où toutes les salles, sauf la salle 5, ouvrent sur l'extérieur ?



Cet exercice peut paraître élémentaire. On a pourtant réalisé quelque chose de non évident : une machine qui sait reconnaître certains mots (car il n'est pas difficile de réaliser un équivalent électronique de ce labyrinthe), et on va voir que cela a de nombreuses applications.
Bien entendu, on va cesser de parler de salles et de labyrinthes. On reconnaît dans le plan de ce labyrinthe un graphe orienté, où chaque arête est munie d'un nom appelé *étiquette*.

6.1.2 Un digicode

Prenons comme deuxième exemple celui d'un digicode comme ceux permettant l'ouverture de la porte de nombreux bureaux ou appartements. Considérons un digicode constitué d'un clavier à 26 touches (les 26 lettres) qui constitue l'organe d'entrée d'un automate dont la sortie commande l'ouverture d'une porte. La porte s'ouvre dès que l'on a tapé la bonne suite de lettres et cela (au moins pour le digicode considéré ici) même si l'on a commencé par se tromper. Si le mot permettant l'ouverture de la porte est « $ananas$ », le système peut être modélisé par le graphe étiqueté représenté par la figure ci-dessous.



Dans ce chapitre, les sommets du graphe seront appelés, pour suivre la terminologie habituelle en la matière, des *états* et les arcs étiquetés des *transitions*. Pour ne pas alourdir le schéma ci-dessus nous n'avons pas représenté les transitions provoquées par la frappe des autres lettres.
Chaque état (y compris l'état 0) est relié en fait à l'état 0 par autant d'arcs étiquetés par toutes les autres lettres. Par exemple, on n'a pas représenté les 25 arcs qui bouclent sur l'état 0 et qui sont étiquetés par toutes les lettres différentes de « a ». Il est facile de constater que dès que la suite de lettres a, n, a, n, a, s est frappée, on atteint l'état 6 (par convention un état final est entouré par deux cercles concentriques) qui déclenche l'ouverture.

6.1.3 Reconnaissance de modèles

Le problème de la reconnaissance de modèles (*pattern matching*) consiste à rechercher les occurrences de certaines séquences de caractères, que l'on appellera mots-clés, dans un texte t.
L'application la plus typique est la recherche documentaire. Étant donné un fond documentaire comprenant des références bibliographiques accompagnées de résumés indiquant les thèmes de chaque ouvrage, on désire chercher les références dans lesquelles certains mots-clés apparaissent.
Mais il existe bien d'autres domaines d'applications, comme celle du génome par exemple : on recherche des séquences d'acides aminés dans une très longue suite. L'algorithme trivial qui consiste à parcourir tout le texte pour rechercher les occurrences du premier mot-clé, puis à le parcourir à nouveau pour rechercher le second, etc. est inefficace, voire impraticable si le texte comporte plusieurs millions de caractères et que l'on recherche plusieurs mots. Le graphe étiqueté ci-dessous a été construit par l'algorithme du à AHO et CORASICK (1 975), il permet de rechercher plusieurs mots en ne parcourant le texte qu'une seule fois (donc en n'effectuant que n comparaisons si n est la longueur du texte t) et ceci quel que soit le nombre de mots recherchés ! Supposons que les mots clés soient : « ni », « rein », « rene »et « irene ».
À partir de cet ensemble de mots recherchés, l'algorithme de AHO et CORASICK fournit le graphe étiqueté de la figure 6.1 page suivante.
Pour des raisons de lisibilité nous n'avons pas représenté toutes les transitions. L'état 0 est l'état initial et partant de l'état 0, bouclant sur ce même état il y a autant de transitions étiquetées par les caractères autres que « n », « r », « i ».
Partant des autres états, sauf arc explicite, les transitions étiquetées par « n », « r », « i »sont reliées respectivement aux états 1, 2 et 3 et les transitions étiquetées par les caractères autres que « n », « r », « i »sont toutes reliées à l'état 0.
L'utilisation de ce graphe étiqueté pour le problème de reconnaissance de modèles est très simple : on explore le texte t, en partant de l'état 0 et en suivant les transitions. À chaque étape, si on est dans l'état i, on examine le caractère c du texte t sur lequel on est. S'il existe une transition partant de l'état i, étiquetée c, conduisant à un état j, on passe à l'état j ; dans le cas contraire on passe dans l'état 0. Dans les deux cas on avance d'un caractère dans le texte t. Chaque fois qu'on passe par un état dont l'ensemble des mots clés associés n'est pas vide, on sait que l'on vient de déceler tous les mots-clés qui se trouvent dans cet ensemble. Sur le schéma, ces ensembles de mots sont reliés à l'état correspondant.

Remarque. De tels graphes étiquetés sont utilisés de manière intensive sur tous les traitements de texte. Ces programmes possèdent tous une fonction « recherche et remplacement » qui construit un graphe étiqueté pour rechercher un mot (ou un type de mots) dans un texte. Ces fonctions de recherche permettent en général de chercher des expressions plus compliquées qu'un simple mot. C'est souvent utilisé dans la recherche de fichiers : si l'on veut chercher tous les fichiers dont le nom commence par « lettre » et se termine par « .txt », on peut demander les fichiers dont le nom est du type « lettre*.txt », où * est un « joker » qui remplace n'importe quel mot.
Les fichiers « lettre1.txt » ou « lettrebis.txt » sont de ce type.

6.2 Récapitulation : définitions et résultats

Formalisons un peu ce que nous venons de voir. Pour parler de graphe étiqueté, il faut d'abord choisir un *alphabet*, dans lequel seront choisies les étiquettes du graphe. On notera A cet alphabet ; dans tous les exercices, l'alphabet sera petit (habituellement 2 ou 3 lettres, exceptionnellement l'alphabet usuel, mais dans ce cas on ne représentera bien sÃ»r pas toutes les arêtes).

Définition 6.1. On appelle *graphe étiqueté* un graphe orienté où toutes les arêtes portent une étiquette choisie dans l'alphabet A, et qui possède un sommet initial (indiqué par une flèche pointant vers ce sommet) et un ou plusieurs sommets finaux (indiqués par un double rond entourant le sommet).
On ne considérera que des graphes étiquetés déterministes, c'est-à-dire tels que de chaque sommet parte une seule arête portant une étiquette donnée.

L'intérêt d'un graphe étiqueté est de reconnaître des mots sur l'alphabet A ; précisons un peu :

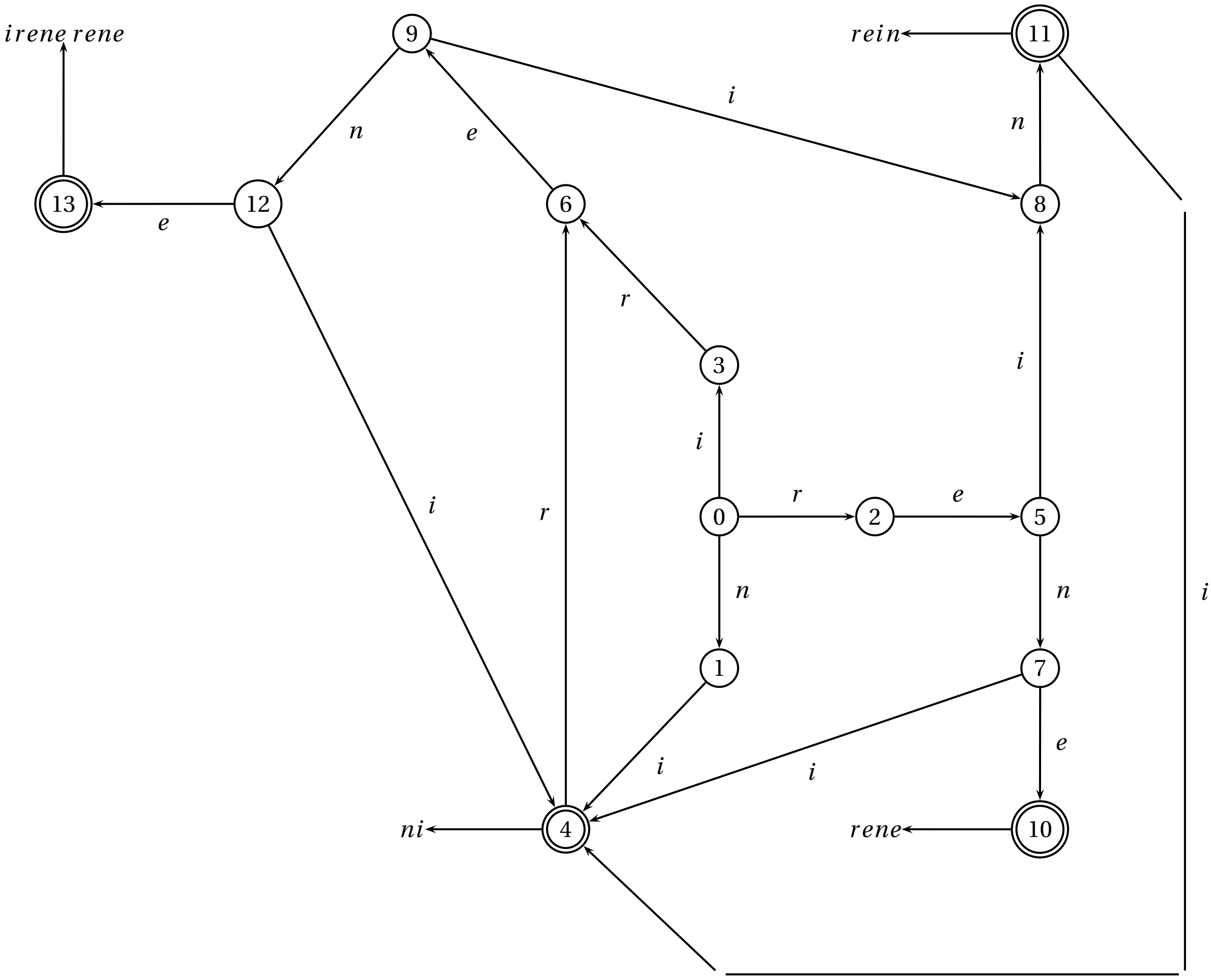
Définition 6.2. On appelle *mot* sur l'alphabet A une suite finie de lettres de A.

Définition 6.3. Soit G un graphe étiqueté par l'alphabet A. On dit qu'un mot sur l'alphabet A est *reconnu* par le graphe G s'il existe un chemin orienté sur le graphe G, partant du sommet initial, arrivant à un sommet final, et étiqueté par ce mot.

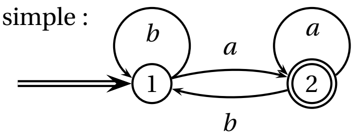
Définition 6.4. On appelle *langage associé* à un graphe étiqueté l'ensemble des mots reconnus par ce graphe étiqueté.

Le contenu de ce chapitre se borne à faire comprendre ces notions de mot reconnu par un graphe étiqueté et de langage associé à un graphe étiqueté, et à les faire fonctionner dans des cas simples.

FIGURE 6.1: Graphe étiqueté construit par l'algorithme du à AHO et CORASICK



Exemple 6.1. Voici un graphe étiqueté très simple :

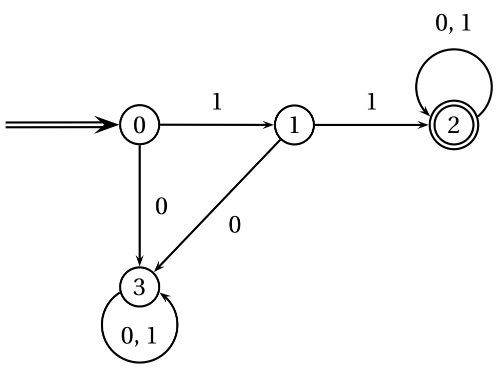


Ce graphe étiqueté reconnaît les mots sur l'alphabet $A = \{a\,;\, b\}$ (c'est-à-dire les mots formés à partir des lettres a et b) se terminant par la lettre a. Le langage L associé à cet automate est l'ensemble des suites finies de a ou de b se terminant par a.

Remarque. Aucun théorème n'est au programme. Il ne faudrait pas s'imaginer que c'est parce qu'il n'y en a pas ! Les graphes étiquetés, ou automates, ont donné lieu depuis une cinquantaine d'années à une théorie mathématique abstraite, riche et diversifiée, possédant de nombreuses applications.
Ils sont en particulier fondamentaux en informatique, et c'est pourquoi on a jugé utile de les faire connaître aux élèves de terminale.

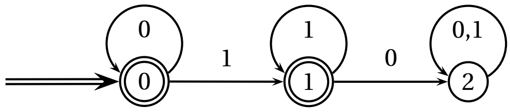
6.3 Exercices

EXERCICE 6.1.
Soit l'automate ci-contre.



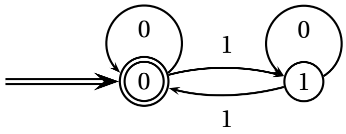
1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 6.2.
Soit l'automate ci-contre.



1. Les mots « 000 », « 001 », « 010 », « 0011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de moins de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

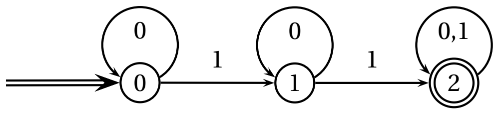
EXERCICE 6.3.
Soit l'automate ci-contre.



1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

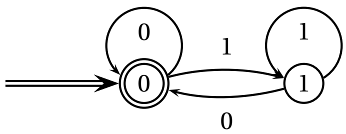
EXERCICE 6.4.
Représenter l'automate qui reconnait les mots ne comportant que des 0 et des 1, et dont le nombre de 1 est impair.

EXERCICE 6.5.
Soit l'automate ci-contre.



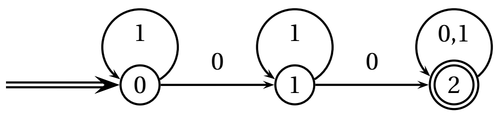
1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 6.6.
Soit l'automate ci-contre.



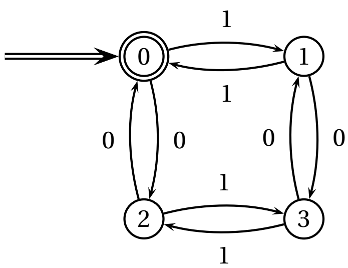
1. Les mots « 11 », « 010 », « 110 », « 101010 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 6.7.
Soit l'automate ci-contre.



1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 6.8.
Soit l'automate ci-contre.



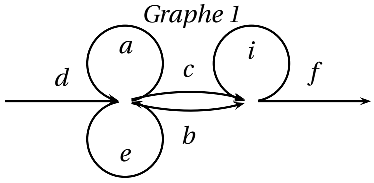
1. Les mots « 11 », « 101 », « 1010 », « 1001 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 6.9.
Donner la suite des états visités par l'automate de la reconnaissance de modèles page précédente si les mots sont recherchés dans le texte t suivant : « annie n'honnit ni irene ni nina »

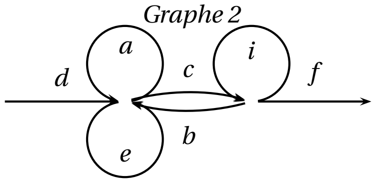
Exercice 6.10.

Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.

Graphe 1



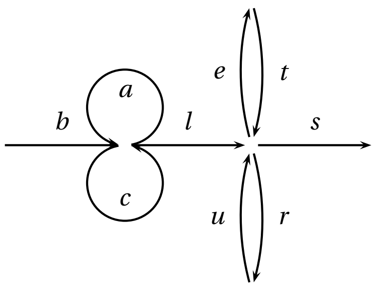
Graphe 2



1. Les mots « $decif$ »et « $daaeebiif$ »sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessus ?
2. Donner, pour chaque graphe ci-contre, la liste des mots de 5 lettres reconnus.
3. Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.
4. Caractériser les mots reconnus par les deux graphes ci-dessus.

Exercice 6.11.

Le graphe étiqueté ci-contre permet de reconnaître des mots (un mot est une suite finie de lettres, n'ayant pas forcément un sens).



VRAI	FAUX	
		il reconnaît le mot « $baccalets$ »
		il reconnaît tous les mots commençant par « bac »
		il reconnaît le mot « $bleus$ »
		il reconnaît exactement six mots de cinq lettres

Chapitre 7

Graphes pondérés

Sommaire

7.1 Définition

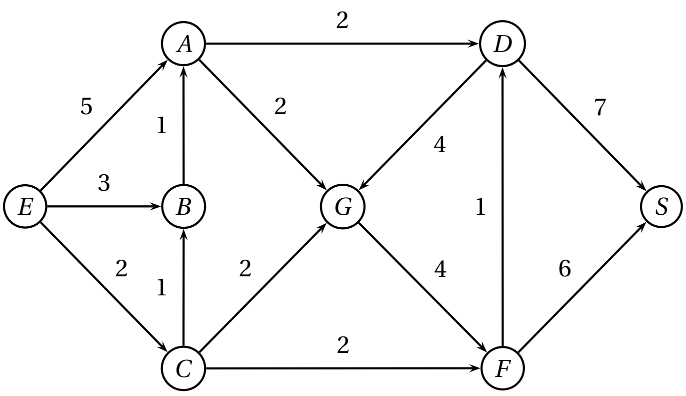
Définition 7.1. On appelle *graphe pondéré* un graphe tel que, à chaque arête a est associé un *poids* P_a.

Remarque. En Terminale nous nous limiterons aux graphes pondérés par des poids positifs.

Les applications des graphes pondérés sont nombreuses : cartes routières avec des indications de durée, de tarif ou de distance portée sur des routes entre deux lieux, par exemple.

7.2 Un problème

Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits) ; quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?

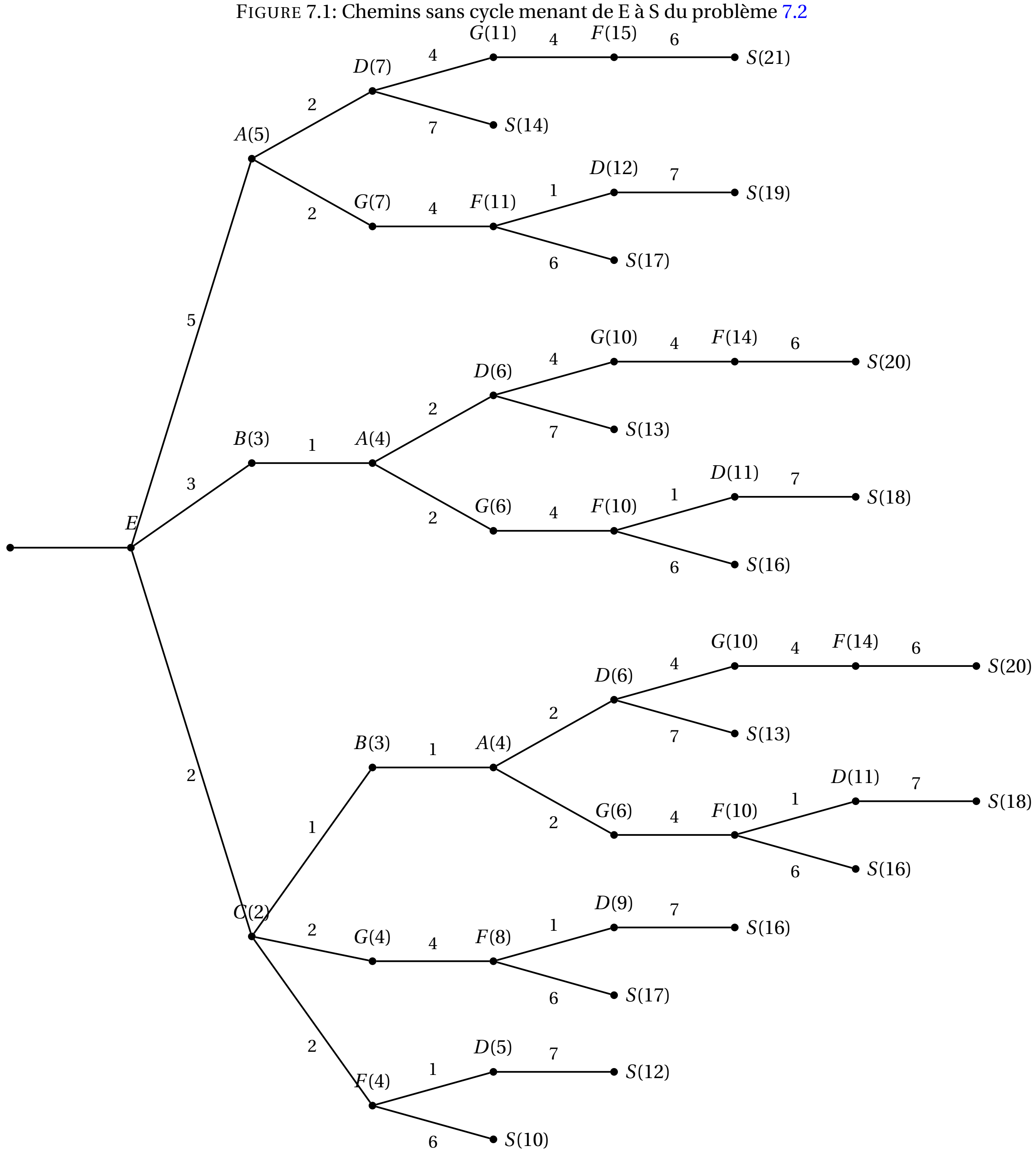


Remarque. Attention à la terminologie : la notion de longueur (plus court chemin) que nous utilisons ici n'est pas la même que celle que nous avons définie au premier chapitre (nombre d'arêtes qui composent un chaîne donnée) ; dans les termes du premier chapitre, $EAGF$, par exemple, est une chaîne orientée de longueur 3, alors qu'ici nous nous permettons de dire qu'elle est de longueur 11 $(5+2+4)$. Nous faisons cet abus de langage à cause de l'interprétation routière évidente de l'exercice ; dans la suite, on utilisera la terminologie exacte (plutôt *poids* que *longueur*), s'il y a un risque de confusion. Ainsi, selon la terminologie exacte, la chaîne $EAGF$ est une chaîne de *longueur* 3 (trois arêtes) mais de *poids* 11 (somme des poids des arêtes).

7.3 L'algorithme de DIJKSTRA

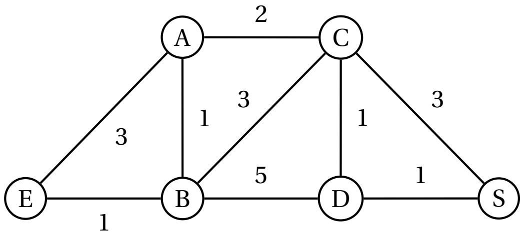
Ce problème est très naturel, et se présente dans bien des domaines différents. Même pour un graphe aussi simple que celui-là, il n'est pas évident d'être sûr que l'on a trouvé le plus court chemin. La méthode la plus immédiate est de considérer tous les chemins de A à S, et de chercher le plus court. Cette méthode est très inefficace : on peut bien sûr se limiter aux chemins sans cycle, donc de longueur bornée par le nombre de sommets, mais, même comme cela, le nombre de chemins possibles reste très grand. Voir la figure 7.1 de la présente page représentant l'arbre pondéré de tous les chemins sans cycle menant de E à S.

FIGURE 7.1: Chemins sans cycle menant de E à S du problème 7.2



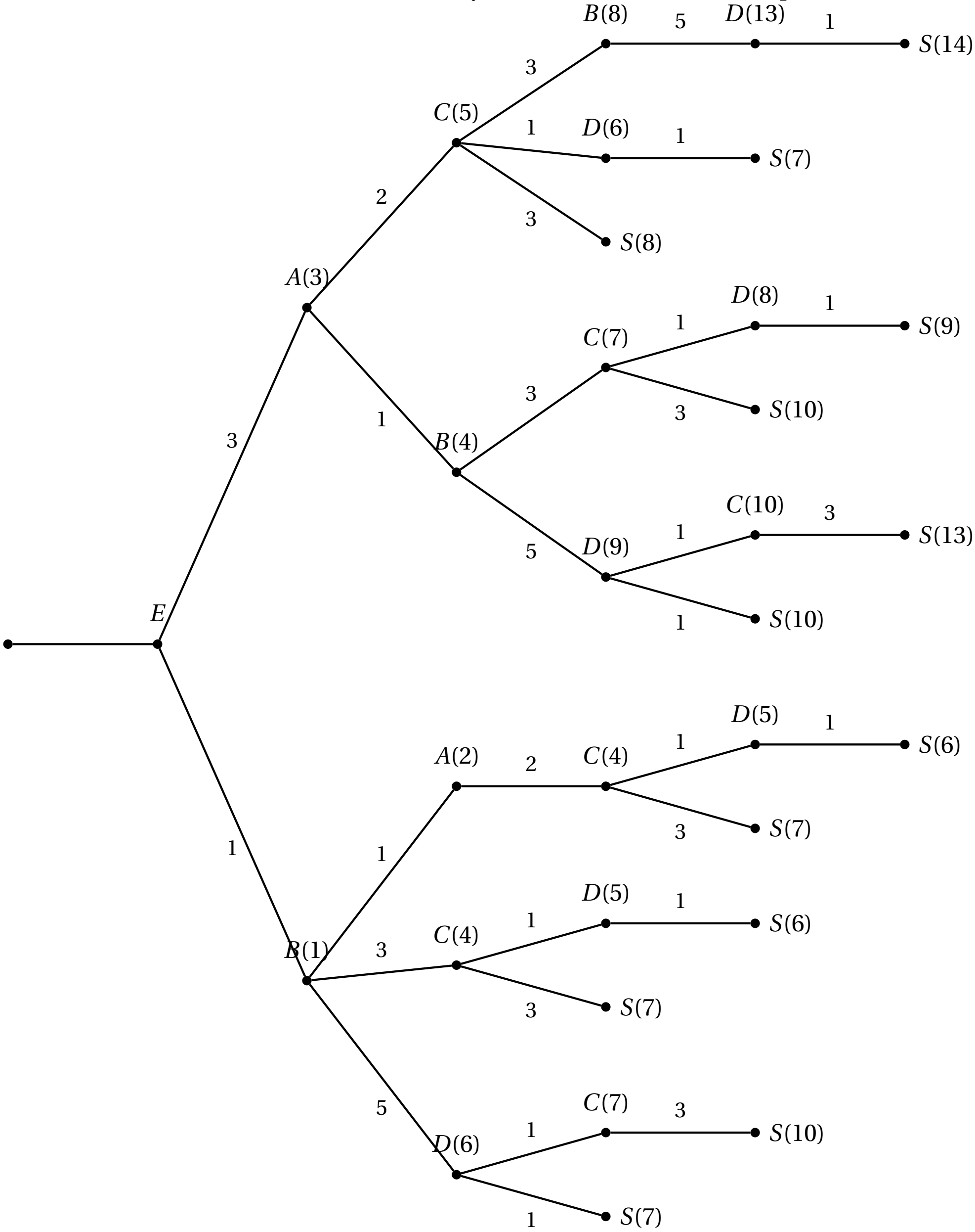
Il nous faut donc obtenir une méthode plus efficace qui, si possible, donne systématiquement le bon résultat.
L'une d'elles est l'algorithme de DIJKSTRA.

Exemple



La figure 7.2 de la présente page présente tous les chemins sans cycle allant de E à S. On pourra y suivre le fonctionnement de l'algorithme.

FIGURE 7.2: Chemins sans cycle allant de E à S de l'exemple



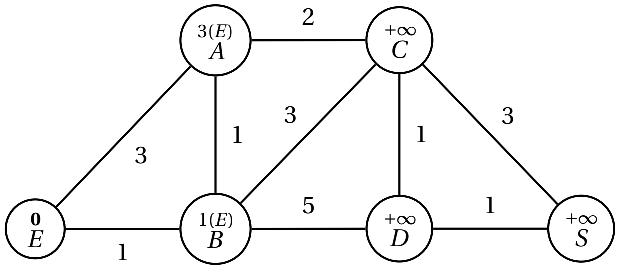
Initialisation : On affecte *provisoirement* le poids 0 à E et on attribue *provisoirement* à tous les sommets le poids $+\infty$.
Algorithme : Tant que tous les sommets ne sont pas marqués définitivement ou que le sommet S à atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

- parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer ***définitivement*** le poids d'un de ceux qui ont un poids minimum ; soit T ce sommet.
- parmi tous les sommets T' *non marqués définitivement* adjacents à T, si la somme s de T et de l'arête de T à T' est inférieure à leur poids provisoire les affecter de s (en indiquant entre parenthèse la provenance)

TABLE 7.1: Application de l'algorithme de DIJKSTRA

Étape 1 Aucun sommet n'est marqué définitivement. E est le seul marqué provisoirement. On marque donc définitivement son poids (0) et on affecte provisoirement A et B, adjacents à E de la somme de E (0) et du poids des arêtes menant de E à A et de E à B.

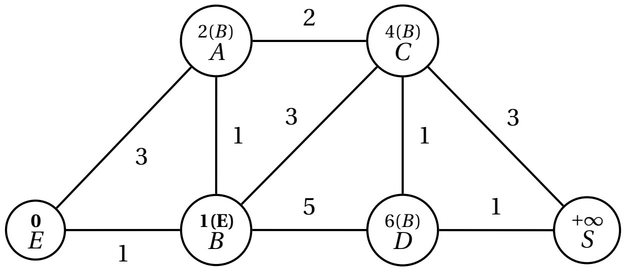
On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 2 B est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (1). On affecte les sommets adjacents à B des poids suivants :

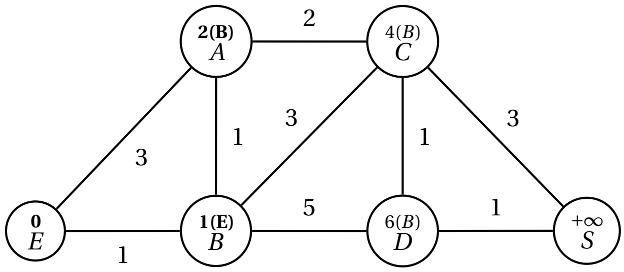
- $A = 2$ car $1(B) + 1(\text{arête } BA) < 3$ (poids provisoire de A)
- $C = 4$ $(1(B) + 3(BC))$
- $D = 6$ $(1(B) + 5(BD))$

On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 3 A est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (2). On ne change rien à C $2(A) + 2(AC) = 4$ (on pourrait aussi le changer car il y a égalité)

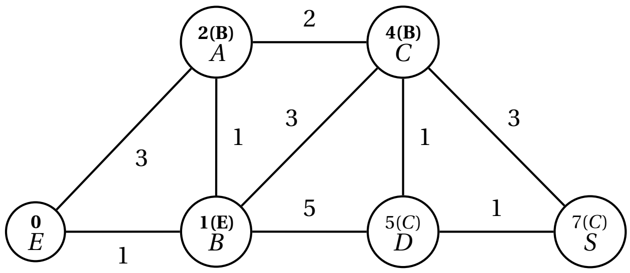
On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 4 C est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (4). On affecte

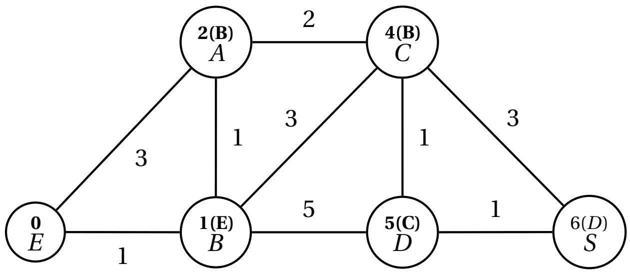
- D du poids provisoire 5 car $4(C) + 1(CD) < 6$
- S du poids provisoire 7 $(4(C) + 3(CS))$

On obtient le graphe marqué ci-contre.



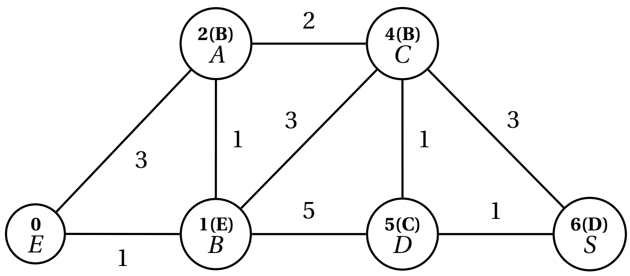
Étape 5 D est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (5). On affecte S du poids provisoire 6 car $5(D) + 1(DS) < 7$

On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 6 S est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (6).

On obtient le graphe marqué ci-contre.



Le tableau 7.1 page ci-contre montre comment appliquer cet algorithme à notre exemple.
Pour retrouver le chemin le plus court, on se sert des sommets marqués : Sur S l'indication est qu'on provient de D, sur D qu'on provient de C, sur C qu'on provient de B et sur B qu'on provient de E.
La plus courte chaîne est donc $EBCDS$, elle mesure 6.

Remarque. On notera que l'algorithme fourni aussi la plus courte chaîne pour aller de E à n'importe lequel des sommets du graphe.

L'algorithme se présente aussi sous forme de tableau :

E	A	B	C	D	S
0	$3(E)$	$1(E)$	∞	∞	∞
	$2(B)$	$\mathbf{1}(E)$	$4(B)$	$6(B)$	
	$\mathbf{2}(B)$				
			$\mathbf{4}(B)$	$5(C)$	$7(C)$
				$\mathbf{5}(C)$	$6(D)$
					$\mathbf{6}(D)$

Théorème 7.1. *Soit G un graphe connexe, éventuellement orienté, l'algorithme de* DIJKSTRA *fournit systématiquement la plus courte chaîne d'un sommet initial à tous les autres sommets du graphe.*

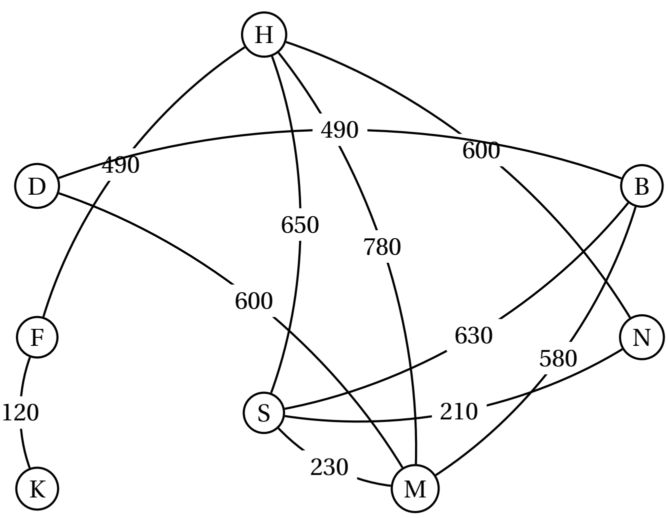
On l'admettra.

EXERCICE.
Résoudre le problème d'introduction à l'aide de l'algorithme de DIJKSTRA.

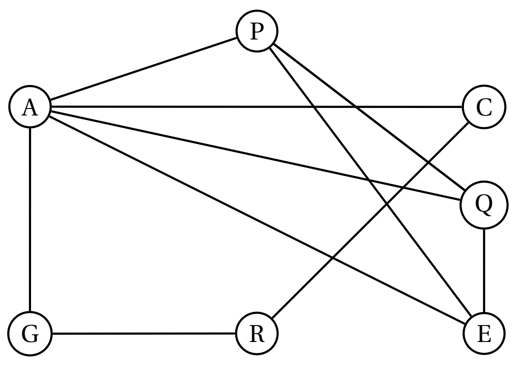
7.4 Exercices d'annales

EXERCICE 7.1 (Amérique du Sud novembre 2006).

1. À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe donné sur la figure ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.
   Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.
   En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.



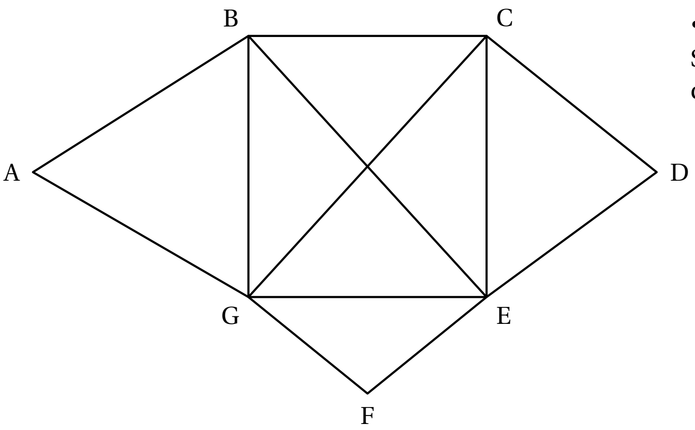
2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.
   L'objectif de cette question consiste à rechercher une répartition des supporters afin d'utiliser le minimum d'hôtels.
   On donne sur la figure ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B .



   (a) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.

   (b) Proposer une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

EXERCICE 7.2 (France, juin 2004).
Le graphe de la figure ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



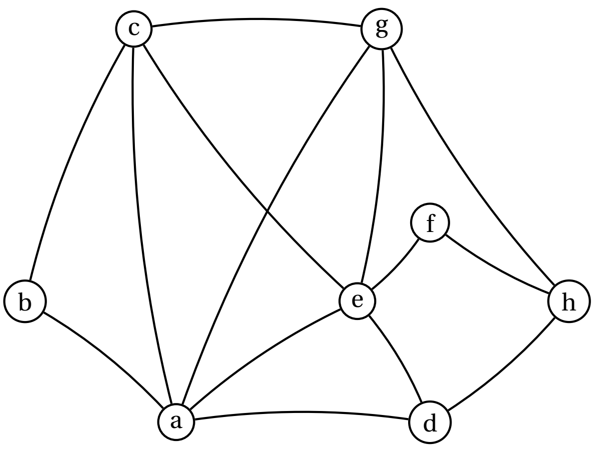
Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :

- AB : 16 minutes ;
- AG : 12 minutes ;
- BC : 8 minutes ;
- BE : 12 minutes ;
- BG : 8 minutes ;
- CD : 7 minutes ;
- CE : 4 minutes ;
- CG : 10 minutes ;
- DE : 2 minutes ;
- EF : 8 minutes ;
- EG : 15 minutes ;
- FG : 8 minutes.

Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.
2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.
3. Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.
   En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

EXERCICE 7.3 (La Réunion, juin 2004).
Partie A
On note G le graphe représenté sur la figure ci-dessous :



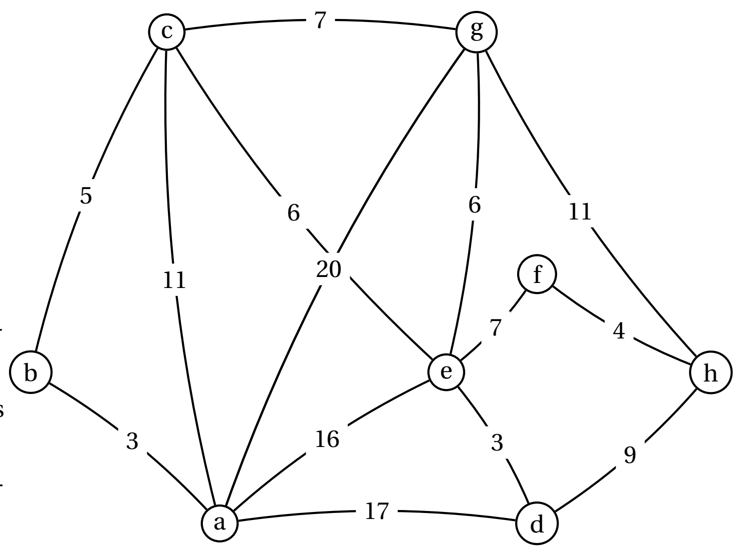
On note M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est donnée :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

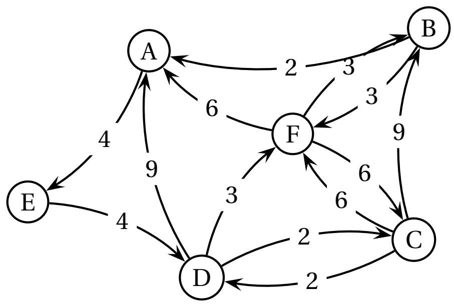
Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
6. Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B
Le graphe de la figure ci-dessous représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).
Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt a à l'arrêt h et donner ce trajet.



EXERCICE 7.4 (Centres étrangers juin 2003)**.**
Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après-midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de parcours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G de la figure ci-dessous.



1. Donner la matrice M associée au graphe G en classant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

   (a) Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

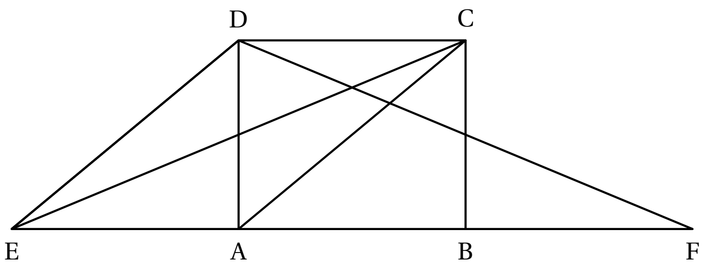
   (b) Citer ces chemins.

   (c) Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

   (d) Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

EXERCICE 7.5 (La Réunion, juin 2003)**.**
Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré						

   (b) Le graphe est connexe. Pourquoi ?

2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.

   (a) Démontrer que son souhait est réalisable.

   (b) Donner un exemple d'un tel parcours.

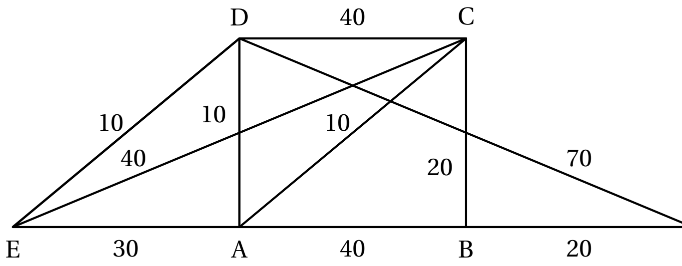
3. Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.

   (a) Démontrer que le nombre chromatique n du graphe vérifie $n \geqslant 4$.

   (b) Expliquer pourquoi $n \leqslant 5$.

   (c) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur E. Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.

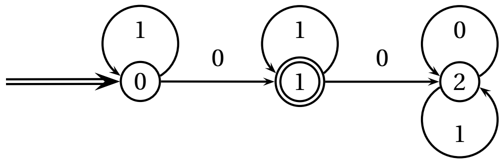


(AB = 40 ; AC = 1O ; AD = 1O ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF = 20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)
Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

Devoir surveillé n° 6

Graphes étiquetés – Plus court chemin

EXERCICE 6.1 (4 points)**.**
Soit l'automate ci-contre.

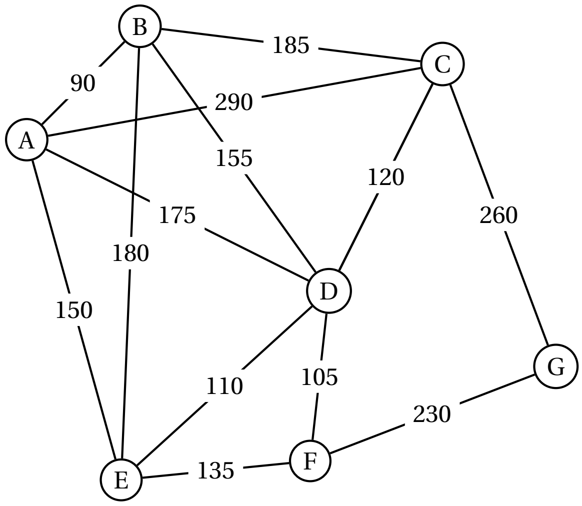


1. Les mots « 10 », « 100 », « 101 », « 1001 » sont-ils reconnus par cet automate ?
   On indiquera, en guise de justification, la liste des états parcourus sur cet automate pour chacun des mots.
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 6.2 (3 points)**.**
Représenter un automate qui reconnait les mots ne comportant que des 0 et des 1 et dont le nombre de 1 est exactement égal à 2.

EXERCICE 6.3 (8 points)**.**
Le graphe Γ suivant représente le plan d'un zoo.
Le sommet A représente son accès. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les différents secteurs animaliers de ce zoo.
Une arête représente l'allée reliant deux secteurs et est pondérée par la distance de parcours, exprimée en mètres, entre ces deux secteurs.

- AB = 90,
- AC = 290,
- AD = 175,
- AE = 150
- BC = 185,
- BD = 155,
- BE = 180,
- CD = 120,
- CG =260,
- DE = 110,
- DF = 105,
- EF = 135,
- FG = 230.



Partie 1 : Pour mieux visualiser sur le plan les différents secteurs du zoo, on veut les colorier de telle sorte que deux secteurs adjacents ne soient pas de la même couleur.

1. Justifier que 4 couleurs sont nécessaires à la réalisation de ce plan.
2. Justifier que 4 couleurs sont suffisantes à la réalisation de ce plan.
3. Conclure.

Partie II :

1. Pour nettoyer les allées, les services techniques du zoo utilisent une balayeuse automobile.
   Est-il possible que cette balayeuse n'emprunte chaque allée qu'une fois et une seule ? Si oui, proposer un tel chemin, sinon justifier votre réponse.
2. Les services de sécurité basés au point A doivent intervenir dans le secteur G. Déterminer, à l'aide d'un algorithme, l'itinéraire le plus court.

Chapitre 8

Graphes probabilistes

Sommaire

8.1 Quelques exemples

8.1.1 Une évolution de population

Le problème

Deux villes X et Y totalisent à elles deux une population d'un million d'habitants.
La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires.
20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

1. Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10, 30, 40 ans.
2. Que se passe-t-il si l'on suppose que 99 % des habitants sont initialement en X ou en Y ?
3. Même question si la population est également répartie entre les deux villes en l'année zéro ?
4. Que constate-t-on ?

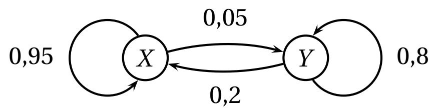
Une solution

1. Commençons par nous demander à quelle condition les populations des deux villes sont stables.
   On admet qu'une telle répartition existe et on appelle x la population de X et y celle de Y pour lesquelles la population de chaque ville est la même chaque année.
   (a) Montrer que x et y sont solutions de : $\begin{cases} 0,2y = 0,05x \\ x + y = 1\,000\,000 \end{cases}$
   (b) Déterminer alors x et y.
2. Que se passe-t-il dans le cas général ?
   (a) L'énoncé nous dit que 95 % des gens qui sont en X y restent, 5 % partent en Y, et que 80 % des gens qui sont en Y y restent, 20 % partant en X.
   En appelant X_n la population de la ville X à l'année n et Y_n celle de Y, expliquer pourquoi on peut représenter l'évolution par le système d'équations :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0,95X_n + 0,2Y_n \\ Y_{n+1} = 0,05X_n + 0,8Y_n \end{cases}$$

(b) Chercher la solution stable, c'est déterminer X et Y tels que $X_{n+1} = X_n = X$ et $Y_{n+1} = Y_n = Y$, sachant que, pour tout entier naturel n, $X_n + Y_n = 1\,000\,000$ et donc que $X + Y = 1\,000\,000$.
En remplaçant dans les deux équations, déterminer X et Y.

(c) Dans le cas général, on peut représenter la situation par le graphe suivant, où l'on a marqué, sur chaque arête joignant le sommet X au sommet Y, la proportion de population qui passe à chaque étape de X à Y. Remarquons que, puisque la population ne peut disparaître ou apparaître, la somme des coefficients sur toutes les arêtes quittant un sommet doit être 1 :



Si l'on note, pour tout entier naturel n, $P_n = (X_n \quad Y_n)$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et de Y au bout de n années, déterminer la matrice M telle que l'équation d'évolution trouvée en 2a peut se réécrire :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

On appelera M : *matrice de transition du système*.

Attention ! Le produit ne se fait pas à droite de la matrice, comme on en a l'habitude, mais à gauche. Cela présente l'avantage de garder l'écriture des vecteurs en ligne, et c'est l'habitude en probabilité.

i. Exprimer P_1 et P_2 en fonction de M et de P_0.

ii. Montrer par récurrence que $P_n = P_0 M^n$.

iii. À l'aide de cette formule, traiter le problème.

8.1.2 Maladie

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain, c'est-à-dire non malade et non immunisé, (S).
D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.
2. Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans pour chacune des situations suivantes :
   - au départ, il est immunisé ;
   - au départ, il est non malade et non immunisé ;
   - au départ, il est malade.

8.1.3 L'allumeur de réverbères

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

1. Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
2. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
3. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

   Vérifier que : $M = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
4. Calculer N^2, R^2, NR et RN puis en déduire M^n, pour n entier naturel.
5. Au jour 0, le réverbère est allumé (respectivement éteint). Calculer la probabilité p_n (respectivement p'_n) que le réverbère soit allumé. (respectivement éteint) au n-ième matin.

8.2 Cas général : graphes probabilistes à p états

On considère un système qui peut se trouver dans p états $\{1 ; 2 ; \dots ; p\}$, avec une certaine probabilité, variable au cours du temps, pour chaque état.
On s'intéresse à l'évolution de ce système au cours du temps, et on fait l'hypothèse que la probabilité de transition de l'état i à l'état j est indépendante du temps, et ne dépend pas de l'histoire antérieure, mais seulement de l'état dans lequel on se trouve.
De bons exemples de tels systèmes sont donnés par les jeux de hasard, tels que jeu de l'oie, Monopoly, jacquet, petits chevaux, etc. Pour de tels jeux, l'état est donné par la case sur laquelle on se trouve ; la façon dont on y est arrivé n'a pas d'importance pour la suite du jeu.
Les systèmes qu'on observe dans la vie réelle sont en général beaucoup plus complexes, mais l'approximation simple qu'on en fait ici (comme dans le dernier des exercices précédents) donne souvent des indications utiles ; ce type de modèle est utilisé en pratique dans un grand nombre de situations, avec de bons résultats.
On peut représenter un tel système par un graphe orienté, dont les sommets sont les états du système, et où l'on associe à chaque transition, de l'état i à l'état j, une arête orientée allant de i vers j, étiquetée par la probabilité de transition, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n. Remarquons que l'on peut rester dans un même état : le graphe peut avoir des boucles.

Définition 8.1. On appelle *graphe probabiliste* un graphe orienté, tel que pour chaque couple de sommets $(i ; j)$ distincts ou confondus il existe au plus une arête de i vers j, et où chaque arête est étiquetée par un réel p_{ij} compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.

De même qu'à un graphe (orienté ou non), on associe une matrice d'adjacence A, dont le terme a_{ij} compte le nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j, on peut associer à un graphe probabiliste une matrice qui décrit les probabilités de transition :

Définition 8.2. Étant donné un graphe probabiliste à p sommets, on appelle *matrice de transition* associée la matrice carrée $M = (m_{ij})$ à p lignes et p colonnes, dont le coefficient m_{ij} est l'étiquette de l'arête orientée de i vers j si elle existe (c'est-à-dire la probabilité de transition de i à j), et 0 sinon.

On veut étudier l'évolution d'un tel système au cours du temps ; on note X_n le vecteur ligne à p éléments dont l'élément d'ordre j est la probabilité que le système se trouve à l'instant n dans l'état j (Attention aux indices ! on a ici une suite de vecteurs lignes, avec chacun p composantes !).
La propriété fondamentale est la suivante :

Propriété 8.1. *Pour tout entier n, on a* $X_{n+1} = X_n \times M$

On l'admettra.
On en déduit immédiatement (la démonstration, simple, par récurrence est laissée au lecteur) :

Propriété 8.2. *Pour tout entier* $n > 0$*, on a :* $X_n = X_0 \times M^n$

Cette formule, qui permet de calculer la répartition de probabilités au temps n si on la connaît au temps 0, est fondamentale pour tous les exercices.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la répartition de probabilité est stable au cours du temps.

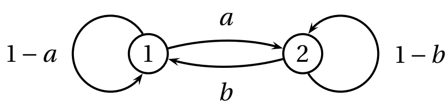
Définition 8.3. On appelle état stable un vecteur ligne $X = (x_1 \quad \dots \quad x_p)$ à p composantes tel que $X = X \times M$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$

La dernière condition $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$ est due au fait que X représente une répartition de probabilité.

Remarquons que la recherche d'un état stable n'est pas difficile en pratique : il s'agit de résoudre l'équation $X = X \times M$, et d'en chercher une solution satisfaisant $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$, ce qui se fait sans problème pour une matrice M donnée.
Nous avons vu, au tout début du premier exercice, l'interprétation de cette équation : pour obtenir un état stable, il faut que toutes les transitions s'équilibrent ; si l'on considère le problème comme une évolution de population, il faut que, pour tout état i, la quantité de personnes qui quittent l'état i à chaque étape soit égale à la quantité de personnes qui y arrivent.
Ce qui est moins évident, c'est qu'un tel état existe, et qu'il soit unique. Ce qui se passe quand on ne part pas d'un état stable n'est pas évident non plus. Nous allons l'étudier en détail dans le cas d'un système à deux états, cas qui est accessible au niveau de la terminale.

8.3 Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états

On suppose qu'il n'y a que deux états, notés 1 et 2. On note U_n (resp. V_n) la probabilité qu'à l'instant n, le système se trouve dans l'état 1 (resp. 2).
Pour tout entier n, on note X_n le vecteur-ligne à deux colonnes, $X_n = \begin{pmatrix} U_n & V_n \end{pmatrix}$. Remarquons que l'on a toujours $U_n + V_n = 1$.
On note a la probabilité de transition de l'état 1 à l'état 2, c'est-à-dire la probabilité que le système passe à l'état 2 à l'étape $n+1$ sachant que le système est à l'état 1 à l'étape n et b la probabilité de transition de l'état 2 à l'état 1.
Les probabilités de demeurer dans l'état 1 ou dans l'état 2 sont donc $1-a$ et $1-b$.
Le système peut donc être représenté par le graphe probabiliste suivant :



et la matrice correspondante est :

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Les nombres a et b sont tous deux compris entre 0 et 1.
Il y a quelques **cas triviaux** que l'on peut traiter à part :

- *Si a et b sont nuls*, M est la matrice identité, et **tous les états sont stables**. Ce n'est pas étonnant, puisqu'il est impossible de changer !
- *Si l'un des deux seulement est nul*, par exemple a, on voit que l'on finit toujours par arriver dans l'état 1. C'est le cas d'une population qui ne se renouvelle pas, et dont les individus peuvent être dans deux états, vivants (état 2) ou morts (état 1) : à long terme, la population ne sera plus composée que de morts. On parle alors d'état absorbant (pour l'état 1). Il y a donc **un état stable**.
- Enfin, *si les deux coefficients a et b sont égaux à 1*, le système clignote : il oscille sans se stabiliser entre l'état 1 et l'état 2, et se retrouve tous les deux coups dans le même état. **Il n'y a pas d'état stable**.

Ces cas particuliers étant faciles à étudier, et peu intéressants, **on supposera désormais que a et b sont strictement positifs, et ne sont pas tous deux égaux à 1**.
On admettra alors le résultat général suivant :

Théorème 8.3. *Considérons un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ telle que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. Alors, le système admet un unique état stable, indépendamment de l'état initial.*

Remarque. On peut retrouver l'état limite stable par le raisonnement élémentaire fait dans le premier exercice : pour qu'une répartition de probabilité $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$ soit stable, il faut que le flux de l'état 1 à l'état 2, ua, soit égal au flux en sens inverse vb ; on a donc une équation $ua = vb$. Comme c'est une répartition de probabilité, on doit aussi avoir $u + v = 1$. En résolvant le système on trouve l'état stable.

On peut généraliser, sous certaines conditions à un graphe à n états :

Théorème 8.4. *Soit un graphe probabiliste à n états, de matrice de transition M. S'il existe une puissance M^k de M dont tous les coefficients sont* strictement *positifs, alors il existe un seul état stable X, vérifiant $X = XM$, et quel que soit l'état initial, le système converge exponentiellement vite vers l'état stable.*

On l'admettra.

8.4 Exercices

EXERCICE 8.1.
Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales.
Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 13 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois sortes d'image, a déclaré mensongère la publicité : « Les images sont également réparties dans les boîtes ». Que penser de ce qu'il affirme ?
On donnera les résultats numériques arrondis à 1 près.

Considérons donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte de céréales.

Partie A : Étude du début du processus.
On pourra s'aider d'un arbre pour représenter la situation

1. Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement une sorte d'image la première semaine, la deuxième semaine, la cinquième semaine.
2. Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement deux sortes d'image la première semaine, la deuxième semaine, la troisième semaine.
3. Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement trois sortes d'image la troisième semaine.

Partie B : Modélisation de la situation.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On appelle :
   - a_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement une sorte d'image la semaine n ;
   - b_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement deux sortes d'image la semaine n ;
   - c_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement trois sortes d'image la semaine n.

   Préciser a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2.
2. On choisit une personne au hasard parmi les 1 000.

   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère les événements :
   - A_n : « La personne considérée possède exactement une sorte d'image la semaine n » ;
   - B_n : « La personne considérée possède exactement deux sortes d'image la semaine n » ;
   - C_n : « La personne considérée possède exactement trois sortes d'image la semaine n ».

   (a) Exprimer $p(A_n)$ en fonction de a_n, $p(B_n)$ en fonction de b_n et $p(C_n)$ en fonction de c_n.

   (b) Représenter par un arbre pondéré l'évolution de la situation de la semaine n à la semaine $n+1$.

   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer $p(A_{n+1})$, $p(B_{n+1})$ et $p(C_{n+1})$ en fonction $p(A_n)$, $p(B_n)$ et $p(C_n)$.

   (d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
   $$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n \qquad (1)$$
   $$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \qquad (2)$$
   $$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n \qquad (3)$$
3. L'état E_n du système la n-ième semaine est le vecteur-ligne $E_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

   (a) Traduire le système formé par les trois équations (1), (2) et (3) par une seule équation matricielle de la forme $E_{n+1} = E_n \times M$.

   (b) Représenter le graphe G, orienté et pondéré, associé à la matrice M.

   (c) Exprimer E_{n+1} en fonction de E_1, M et n.

   (d) En utilisant la calculatrice pour faire les calculs, déterminer E_{13} et E_{22}.
   Commenter l'accusation de l'inspecteur des fraudes.

EXERCICE 8.2.

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20 % des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges. On pourra éventuellement représenter ces mouvements de population par un arbre pondéré ou par un graphe probabiliste G.

On donnera les résultats en pourcentage, sous forme décimale arrondie à 0,01 près.

1. On suppose dans cette question qu'en 2 002, 25 % de la population totale de l'île habite dans la capitale.
   (a) Quelle est la répartition prévisible de la population totale de l'île entre la capitale et le reste de l'île en 2 003 ?
   (b) Traduire le calcul effectué par la relation matricielle $E_1 = E_0 \times M$, où :
   - E_0 est un vecteur-ligne de dimension 2 représentant la répartition de la population entre la capitale et le reste de l'île en 2 002 ;
   - E_1 est un vecteur-ligne de dimension 2 représentant la répartition prévisible de la population entre la capitale et le reste de l'île en 2 003 ;
   - M est une matrice carrée de dimension 2 représentant les mouvements de population dans l'île d'une année sur l'autre.

   (c) Quel est le lien entre la matrice M et le graphe G ?
   (d) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2 005.
2. On suppose dans cette question qu'en 2 002, 75 % de la population totale de l'île habite dans la capitale. À l'aide d'un calcul matriciel et en utilisant la fonction matrice de la calculatrice :
   (a) Déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2 005.
   (b) Déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2 010.
3. Reprendre la question précédente en supposant qu'en 2 002, 10 % de la population totale de l'île habite dans la capitale.
   Que remarque-t-on ?
4. On considère les matrices :
   - $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
   - $R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que $M = N + 0,4R$.
   (b) Calculer N^2, R^2, NR et RN.
   (c) Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $M^n = N + 0,4^n R$.
   (d) En déduire la valeur exacte de chaque coefficient de la matrice M^n.
   (e) Déterminer la limite de chaque coefficient de la matrice M^n quand n tend vers l'infini.
5. Dans cette question, on appelle x la valeur décimale du pourcentage de la population totale de l'île qui habite dans la capitale en 2 002 (x est un réel de l'intervalle $]0;1[$).
   Soit n un entier naturel, la répartition prévisible de la population de l'île en l'année $2002 + n$ est un vecteur-ligne E_n.
   (a) Déterminer E_0.
   (b) Exprimer E_n en fonction de M et E_0.
   (c) Calculer le vecteur-ligne $E = E_0 \times N$.
   Vérifier que E est indépendant de x.
   (d) Déterminer la limite de chaque coefficient du vecteur-ligne E_n quand n tend vers l'infini.
   Comparer cette limite au coefficient correspondant du vecteur-ligne E.
   (e) Démontrer que $EM = E$.

8.4.1 Annales

EXERCICE 8.3 (Centres étrangers, juin 2 005)**.**
On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs »et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :
- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$
3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $\left(f_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EXERCICE 8.4 (Liban, juin 2 003)**.**
Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :
a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
P_n la matrice $[a_n \quad b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B.
   Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0 \quad b_0]$.
2. (a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   (b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   (c) En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = [x \quad y]$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
   Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
   Déterminer x et y.
   En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers plus l'infini.
   Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

EXERCICE 8.5 (Amérique du sud, novembre 2 004)**.**
Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
P_n la matrice $(a_n\,; b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times \text{M}$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5. Déterminer le réel x tel que $(x \quad 1-x) \times \text{M} = (x \quad 1-x)$.
   On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

EXERCICE 8.6 (Antilles-Guyane, juin 2 004)**.**
On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le **score** d'un(e) étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :
- Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
- Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $(n+1)$-ième compétition est de $\frac{2}{5}$.
- Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$.

1. Représenter G et donner sa matrice.
2. Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
   (a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.
   (b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.
3. Déterminer l'état stable du graphe G.
4. Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes.
   Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

EXERCICE 8.7 (Polynésie, juin 2 004)**.**
Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.
Partie A
- S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$.
- S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1. Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.
2. En déduire la probabilité des évènements suivants :
   J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;
   K : « il fera sec mardi » ;
   L : « il fera humide mercredi ».

Partie B

1. Soit n un entier naturel, on note :
   s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;
   h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide ;
   P_n la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n. Déterminer une relation entre s_n et h_n.
2. (a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.
   (b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.

3. La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer M^2 (utiliser la calculatrice).

   (b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A.

4. (a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.

   (b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 8.8 (France, septembre 2 004)**.**
On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.
On suppose que l'effectif de cette population est stable.
Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.
30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.
Au bout d'une semaine, une enquête indique que :
• 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
• 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.
L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Soit $X_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.

   (a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.

   (b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

3. On admet que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)0,7^n \\ \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}$

   Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

EXERCICE 8.9 (France métropolitaine - 2011)**.**
Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».
Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.
Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$.
Ainsi $P_0 = (0,2 \quad 0,7 \quad 0,1)$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.

2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0,2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0,15 & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

EXERCICE 8.10 (Amérique du nord - 2008).
Les parties I et II sont indépendantes

Partie I (calculs exacts demandés)
Sur une route, deux intersections successives, "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante On admet que :

- La probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\frac{3}{4}$;
- La probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\frac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de "a" est vert », B l'évènement « le feu de "b" est vert ».
Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et "b".

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.
2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :
À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,9$ ou sera rouge avec la probabilité $0,05$.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,1$ ou sera vert avec la probabilité $0,8$.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,5$ ou sera orange avec la probabilité $0,05$.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange a la n-ième intersection,
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
- $P_n = [V_n \quad O_n \quad R_n]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1. (a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.
   (b) Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M = \begin{bmatrix} \ldots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \ldots & 0,1 \\ 0,45 & \ldots & 0,5 \end{bmatrix}$$

2. (a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
   (b) On donne $P_3 = [0,87 \quad 0,05 \quad 0,08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?
3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = [0,85 \quad 0,05 \quad 0,10]$.
   Donner une interprétation concrète de ce résultat.