Chapitre 11

Sélection d'exercices d'annale pour réviser

Sommaire

11.1 Liban 30 mai 2011

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On rappelle que :

- Le taux d'emploi d'une classe d'individus est calculé en rapportant le nombre d'individus de la classe ayant un emploi au nombre total d'individus dans la classe.
- Un individu âgé de 55 ans à 64 ans est appelé un « senior ».
- UE désigne l'Union européenne.

Selon un rapport de l'INSEE :

« Le taux d'emploi des personnes âgées de 55 à 64 ans est considéré comme un levier privilégié pour limiter l'exclusion de ces personnes du marché du travail et maîtriser les dépenses de retraites.

En 2008, il est de 45,6 % dans l'UE, mais seulement de 38,3 % en France alors que l'objectif de l'UE comme de la France est d'atteindre 50 % en 2010. »

Le but de l'exercice est de vérifier si la France a atteint l'objectif visé par l'UE.

Dans tout l'exercice, le taux d'emploi sera exprimé en pourcentage. Les valeurs approchées seront arrondies au dixième.

Partie A Étude statistique et interpolation de données

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 1992 et 1998 :

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux d'emploi des seniors en % y_i	29,8	29,7	29,6	29,6	29,4	29	28,3

Source : INSEE, Eurostat

1. Déterminer, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2. Selon cet ajustement, déterminer le taux d'emploi des seniors en 1999.
3. Selon cet ajustement, déterminer si la France a atteint l'objectif fixé en 2010.

Partie B Interpolation de données à l'aide d'un second modèle

Le taux d'emploi des séniors en France est en réalité de 28,8 % en 1999 et on admet qu'à partir de l'année $2000 + n$, il est donné par l'expression $29,9 \times 1,037^n$ où n désigne un entier naturel. Selon ce modèle, déterminer :

1. Le taux d'emploi des seniors en 2010.
2. À partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

Partie C Extrapolation de données selon un troisième modèle

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 2001 et 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Taux d'emploi des seniors en % y_i	31,9	34,7	37	37,8	38,5	38,1	38,2	38,2	38,9

Source : INSEE, Eurostat

Désormais, à partir de 2001, on choisit un modèle logarithmique et on admettra qu'à partir de 2001, le taux d'emploi des seniors est donné par la fonction f définie sur $[9\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x+1) + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ désignent deux nombres réels.}$$

1. En considérant les années 2001 et 2006, écrire le système d'équations que doivent vérifier a et b.
2. En déduire que $a = \frac{6,2}{\ln 1,5}$.
   Dans la suite, on admettra que $a = 15,3$ et $b = -3,3$.
3. Selon ce modèle, déterminer à partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad g(x) = -x+1 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B Calcul d'aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en **annexe**.
   On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.
   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de $\mathscr{A}$.
   (b) Déterminer la limite de $\mathscr{A}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes :

- Catégorie A, composée des clients d'agence
- Catégorie I, composée des clients internet

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.

On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.

On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

ANNEXE

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010+n$,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010+n$,
- $P_n = (a_n \quad i_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n,
$P_{n+1} = P_n \times M$.

Partie A État stable d'un graphe probabiliste
Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.

   On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.
3. (a) Calculer la matrice P_1.

   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.
   Interpréter le résultat.

Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. (a) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,94a_n + 0,01$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \frac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{113}{150} \times 0,94^n + \frac{1}{6}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

11.2 Pondichéry 13 avril 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients.

20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

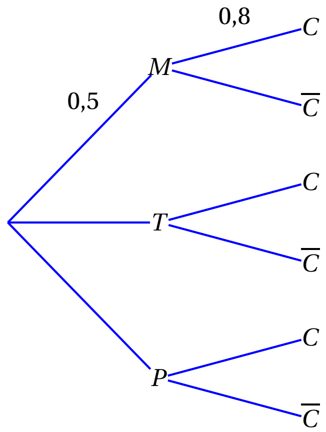
- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :

- M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'évènement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $P_T(C)$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. (a) Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.

   (b) Montrer que $p(C) = 0,76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*).
5. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €.
   Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

   (a) Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?

   (b) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	…	…	…
$p(s_i)$	0,02	0,18	…			

   (c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

11.3 Amérique du Sud novembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On se propose d'étudier l'évolution des productions d'électricité d'origines hydraulique et éolienne depuis 1999.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Production d'électricité d'origine hydraulique

Le tableau suivant donne la production d'électricité d'origine hydraulique en France pour plusieurs années entre 2000 et 2005.

Année	2000	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i :	0	2	3	4	5
Production en GWh y_i :	71 593	65 826	64 472	65 393	57 271

1. Représenter, dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nuage de points associés à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ définie ci-dessus.

   On utilisera une feuille de papier millimétré et on choisira comme unités graphiques 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 10 000 GWh sur l'axe des ordonnées. On débutera la graduation sur l'axe des ordonnées à 50 000.

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.

   (a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation $y = mx + p$ de la droite d d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, les coefficients m et p seront arrondis au dixième.

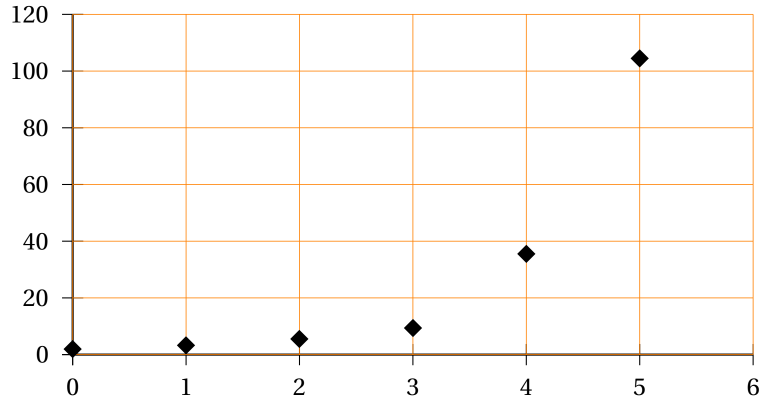
   (b) Placer le point G et tracer la droite d sur le graphique précédent.

Partie B : Production d'électricité d'origine éolienne

Le tableau suivant donne la capacité de production d'électricité d'origine éolienne installée enFrance de 2003 à 2008.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i :	0	1	2	3	4	5
Puissance installée en MWh y_i :	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5

1. Ces données sont représentées par le nuage de points ci-après :



   On considère qu'un ajustement affine n'est pas pertinent.

   L'allure du nuage suggère de rechercher un ajustement exponentiel de y en x. Pour cela on pose pour tout entier naturel i compris entre 0 et 5 :

$$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$$

   Dans les questions a et b suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice. Aucune justification n'est demandée. Les résultats seront arrondis au centième.

   (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Puissance installée : y_i	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5
$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$						

   (b) Déterminer une équation de la droite d' d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés.

(c) Sachant que $z = \ln\left(\frac{y}{100}\right)$, déterminer l'expression de y sous la forme ke^{ax} où k et a sont des nombres réels à calculer.

2. On suppose que l'évolution de la puissance installée se poursuit dans un avenir proche selon le modèle précédent.
Estimer, au centième de MWh près, la puissance installée prévue pour l'année 2010.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,0]$ par $f(x) = x^2$. Sa valeur moyenne sur l'intervalle $[-3\,;\,0]$ est :
   - $\mu = 4,5$
   - $\mu = 3$
   - $\mu = \frac{1}{3}$
   - $\mu = -3$
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$, f' désigne sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.
   Alors :
   - $f'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
   - $f'(x) = \frac{1}{2x+1}$
   - $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$
   - $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{2x+1}$
3. La primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$ par
   $f(x) = \frac{2x^2-x+3}{x}$ telle que $F(1) = 1$ vérifie :
   - $F(x) = \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x^2} - \frac{17}{3}$
   - $F(x) = x^2 - 1 + 3\ln x$
   - $F(x) = x^2 - x + 3\ln x + 1$
   - $F(x) = 2 - \frac{3}{x^2} + 1$
4. f est la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{x}$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné du plan. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à :
   - $5\ln 2$
   - $\ln 10 - \ln 5$
   - $3,466$
   - $\ln\left(\frac{2}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)$
5. La limite de la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$ par
   $f(x) = x^2 - x - \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$ est :
   - $-\infty$
   - 0
   - e
   - $+\infty$

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

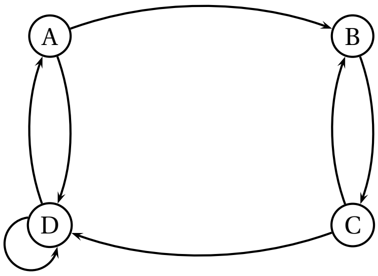
Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.*

Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. Les points A $(1\,;2\,;3)$, B$(3\,;2\,;1)$ et C $(1\,;1\,;1)$ sont trois points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   Le plan (ABC) est parallèle au plan P d'équation :
   - $x + y - z = 0$
   - $y = \frac{1}{2}$
   - $x + y + z - 1 = 0$
   - $x - 2y + z + 3 = 0$
2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}$. Cette suite :
   - a pour limite $\frac{1}{n}$
   - a pour limite 0
   - a pour limite 1
   - n'a pas de limite

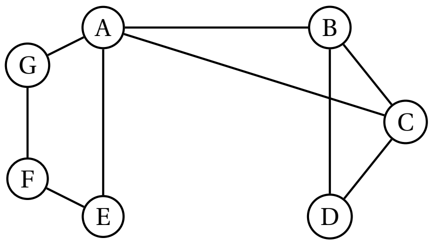
3. Le graphe ci-contre admet exactement n chaînes de longueur 4 allant de A vers B avec :

   - $n = 1$
   - $n = 3$
   - $n = 5$
   - $n = 8$



4. La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$:
   - n'est pas monotone
   - n'admet pas de limite
   - est croissante
   - est majorée par 0
5. Le graphe ci-dessous a un nombre chromatique κ égal à :

   - 2
   - 3
   - 4
   - 5

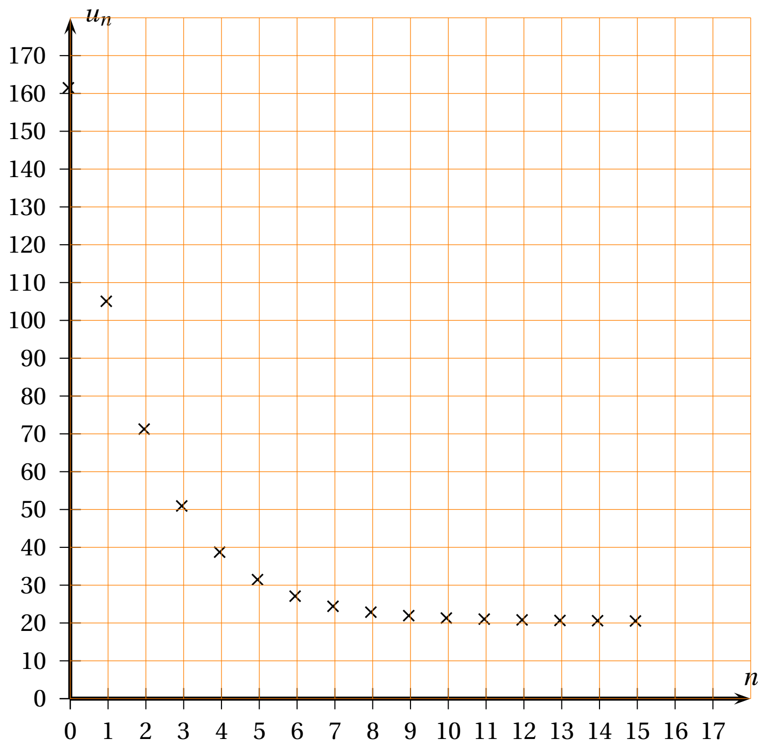


11.4 Nouvelle-Calédonie novembre 2010

EXERCICE 2 **6 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A - Observation d'une suite de nombres



1. On donne ci-dessous la représentation graphique des 16 premiers termes d'une suite (u_n) dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Les quatre premiers termes de la suite (u_n) ont été calculés avec un tableur :

n	u_n
0	161
1	104,6
2	70,76
3	50,456

   La suite (u_n) peut-elle être une suite géométrique ? On justifiera la réponse donnée.

B - Étude de la suite

La suite (u_n) observée dans la partie A est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$ et $u_0 = 161$.

1. Calculer u_4.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

11.5 Antilles–Guyane septembre 2010

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.
Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

Partie A

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1 200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise (on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).
On note :

F l'évènement : « l'employé est une femme » ;

T l'évènement : « l'employé choisit le train ».

1. Calculer les probabilités $p(\text{F})$, $p(\text{T})$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale).
2. Expliquer ce que représente l'évènement $\text{F} \cap \text{T}$, puis calculer sa probabilité.
   Les évènements T et F sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme (on donnera le résultat arrondi au millième).

Partie B

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- la formule n° 1 : voyage en 1^e^ classe plus hôtel pour un coût de 150 € ;
- la formule n° 2 : voyage en 2^e^ classe plus hôtel pour un coût de 100 €.

40 % des employés inscrits choisissent la formule n° 1.
Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 €. Indépendamment de la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.
On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note :

- U l'évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n° 1 » ;
- D l' évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n° 2 » ;
- E l' évènement : « l'employé inscrit choisit l'excursion facultative ».

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n° 2 et l'excursion facultative est égale à $0,48$.
3. Soit C le coût total du voyage (excursion comprise).
   (a) Déterminer les différentes valeurs possibles que peut prendre C.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de C.
   (c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte $0,75$ *point. Une réponse fausse enlève* $0,25$ *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	$2\ln 2 + 3$	↗ $+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = e^2$ admet :
   - aucune solution • une unique solution • deux solutions
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1,5)$ admet un coefficient directeur :
   - strictement positif • strictement négatif • nul
3. $f[-\ln(2)]$ est égal à :
   - $-2\ln(2) + 3$ • $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ • $-2\ln(2) + 1$
4. La courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :
   - $y = 2x + 2$ • $y = 2x + 1$ • $x = 0$

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ par

$$f(x) = ax + b - \frac{16}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

La courbe représentative de f, donnée en annexe, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point A de coordonnées $(2\,;\,4)$.

1. (a) Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.
   (b) En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a., déterminer les valeurs des réels a et b.
2. On admet que la fonction f est définie sur $[1\,;\,6]$ par

$$f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}.$$

(a) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ en précisant uniquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.

(c) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ par

$$F(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x.$$

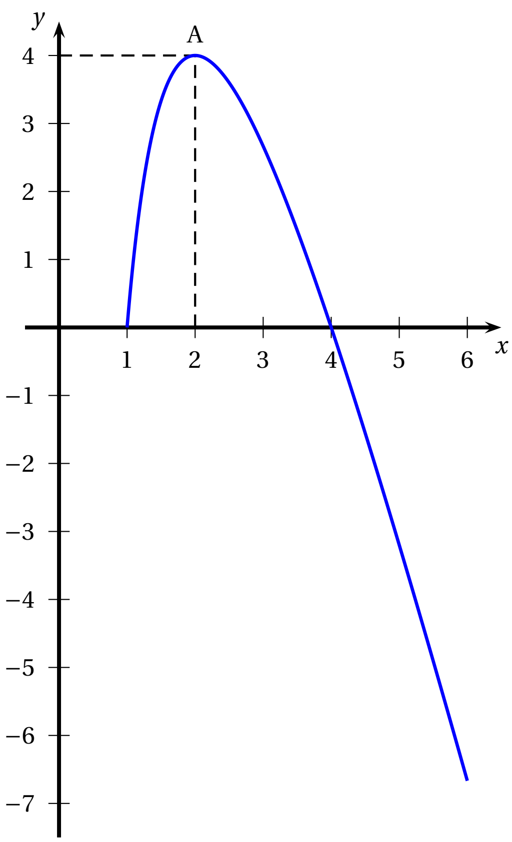
(a) Montrer que F est la primitive de la fonction f sur $[1\,;\,6]$ telle que $F(1) = 0$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction F sur l'intervalle $[1\,;\,6]$, les valeurs seront arrondies au millième.

PARTIE B

Une entreprise fabrique des pièces pour assemblage de moteurs qu'elle conditionne par centaines. Sa fabrication journalière varie entre 100 et 600 pièces. L'objectif est d'étudier le bénéfice quotidien réalisé par cette entreprise.
Une étude a montré que le bénéfice marginal quotidien de cette entreprise est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, appelée fonction « bénéfice marginal ». Pour x compris entre 1 et 6, x est exprimé en centaines de pièces fabriquées et vendues quotidiennement et $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros.
En économie, la fonction « bénéfice marginal » est considérée comme la dérivée d'une fonction appelée fonction « bénéfice ».
On sait de plus que le bénéfice de l'entreprise est nul pour la fabrication et la vente quotidienne de 100 pièces.
Dans ces questions toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. En déduire le bénéficie maximal (on donnera ce bénéfice maximal arrondi à l'unité d'euro).
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice supérieur à 3 000 € (on donnera le résultat arrondi à l'unité)

ANNEXE



11.6 Métropole–La Réunion 17 septembre 2010

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est composé de deux parties :

- la partie I est un « vrai-faux » sans justification,
- la partie II est un questionnaire à choix multiples avec justification.

PARTIE 1 : Pour chacune des affirmations, **recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer sans justifier** si elle est vraie ou fausse.

Une réponse exacte rapporte $0,5$ *point, une réponse fausse enlève* $0,25$ *point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-4} = +\infty$
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -6x+9$.
3. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+5\right)$. Le nombre dérivé de la fonction f en 1 est $\frac{1}{3}$.
4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$. On définit la fonction g par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$. On affirme que la fonction g est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

PARTIE II : Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question **et la réponse choisie correspondante** puis **justifier cette réponse**.

Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 *point.*

Toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Si pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$, alors la limite en $+\infty$ de $f(x)$ est :	$-\infty$	0	$+\infty$
2. $\frac{\ln(\mathrm{e}^2)}{\ln 16}$ est égal à :	$2\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)$	$\frac{1}{2\ln 2}$	$2\ln\mathrm{e} - \ln 16$
3. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ est égale à :	$-\frac{1}{12}$	$\ln\left(\frac{4}{3}\right)$	$\frac{1}{12}$

EXERCICE 2 **5 points**

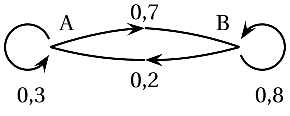
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses parmi les trois proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la question choisie.

Partie 1 : Aucune justification n'est demandée

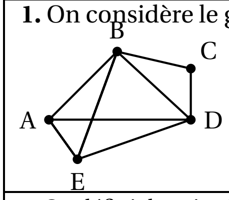
Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

<table>
<tr><th>Énoncé</th><th>Réponse A</th><th>Réponse B</th><th>Réponse C</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on désigne par (S) l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $z = 2x - y^2 + 1$ et par (P) le plan d'équation $2x+3y-5=0$.</td><td colspan="3">1. a. La surface (S) passe par le point de coordonnées :</td></tr>
<tr><td>$(1\ ;\ -1\ ;\ 4)$</td><td>$(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)$</td><td>$(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. b. La courbe de niveau de cote 3 de la surface (S) est :</td></tr>
<tr><td>une droite</td><td>une parabole</td><td>une hyperbole</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. c. Le plan (P) :</td></tr>
<tr><td>contient le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ -5)$</td><td>est parallèle au plan $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$</td><td>est parallèle à l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Soient G le graphe probabiliste ci-dessous et M la matrice de transition associée à ce graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$M^2 = \begin{pmatrix}0,23 & 0,77\\0,22 & 0,78\end{pmatrix}$</td><td>$M = \begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,8 & 0,2\end{pmatrix}$</td><td>$M = \begin{pmatrix}0,3 & 0,8\\0,2 & 0,7\end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

Partie II : Recopier pour chaque question la réponse exacte et justifier celle-ci.

Chaque réponse exacte et bien justifiée rapportera 1 *point.*

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère le graphe H : 	**a.**	Le graphe H admet une chaîne eulérienne.	Le graphe H admet un cycle eulérien.	Le graphe H est complet.
	b.	Le nombre chromatique du graphe est 3.	Le graphe admet un sous-graphe complet d'ordre 4.	Le graphe n'est pas connexe.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = -0,4u_n + 1750$. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1250$. Alors :		La suite (v_n) est arithmétique.	La suite (v_n) est géométrique.	La suite (u_n) est géométrique.

11.7 Asie 22 juin 2010

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et, en face de celui-ci, recopier la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Une forêt, exploitée depuis le premier janvier 200S, voit sa population d'arbres diminuer de 10 % chaque année. En supposant que la déforestation se poursuive à ce rythme, la population d'arbres aura diminué le premier janvier 2010 d'environ :

   $\boxed{41\ \%}$ $\boxed{50\ \%}$ $\boxed{59\ \%}$

2. Soit la suite (V_n) définie par $V_0 = 5$, $V_1 = 7$ et $V_{n+2} = 3V_{n+1} - 2V_n$.

   $\boxed{V_3 = -2}$ $\boxed{V_3 = 19}$ $\boxed{V_3 = 23}$

3. Dans un repère de l'espace, le plan (P) d'équation 5x - z+ 7 = 0 est parallèle à l'axe

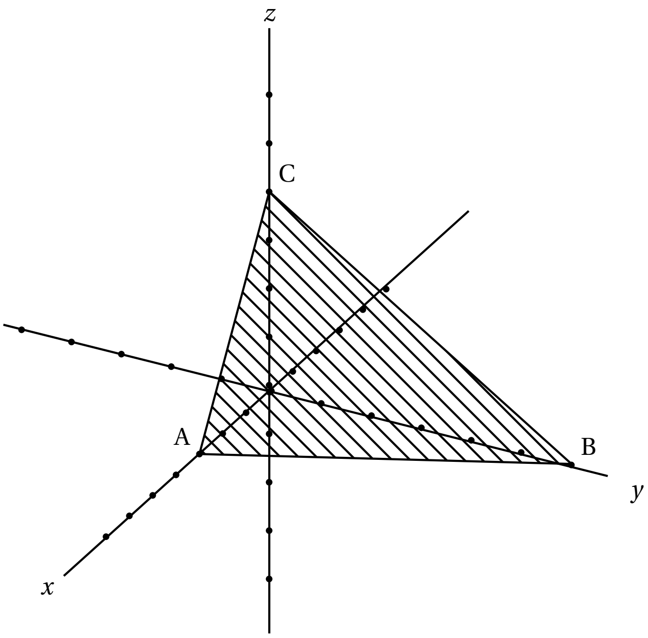
   $\boxed{\text{des abscisses}}$ $\boxed{\text{des ordonnées}}$ $\boxed{\text{des cotes}}$

4. Dans un repère de l'espace, l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = x^2 - y + 3$ et du plan (Q) d'équation $z = 7$ est

   $\boxed{\text{une droite}}$ $\boxed{\text{une parabole}}$ $\boxed{\text{un point}}$

5. Le plan (ABC), dessiné ci-dessous dans un repère de l'espace, a pour équation

   $\boxed{3x + 6y + 4z = 9}$ $\boxed{2x + y - z = 6}$ $\boxed{4x + 2y + 3z = 12}$



11.8 Antilles–Guyane 18 juin 2010

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

M. et M[me] Martin, qui habitent une grand ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'années suivante est de 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2009+n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2009+n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2009+n)$.

Partie A

1. (a) Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).
   (b) En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.
2. (a) Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2009.
   (b) On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix};\ M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}444 & 0{,}556 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix};\ M^4 = \begin{pmatrix} 0{,}4332 & 0{,}5668 \\ 0{,}4251 & 0{,}5749 \end{pmatrix}.$$

   En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième)*.
3. Soit P la matrice ligne $(x \quad y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x+y=1$.
   Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

Partie B

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - \frac{3}{7}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de u_n, puis celle de a_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne pour 6 années le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France.

Années	1997	1999	2001	2003	2005	2007
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 6$	0	2	4	6	8	10
Nombre (en millions) de spectateurs y_i $1 \leqslant i \leqslant 6$	149,3	153,6	187,5	173,5	175,5	177,9

Source : INSEE - d'après le Centre National de la Cinématographie (CNC)

Partie 1

Pour chacune des questions ci-dessous, trois réponses sont proposées et une seule est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25.
L'absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève de point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. Le taux d'augmentation du nombre de spectateurs de 1997 à 1999 est donné par le calcul suivant :

   • $\dfrac{153,6}{149,3}$ • $\dfrac{153,6-149,3}{153,6}$ • $\left(\dfrac{153,6}{149,3}-1\right)$

2. En supposant que le nombre de spectateurs augmente de 1 % tous les ans, à partir de 2007, le nombre de spectateurs en 2010 est donné par le calcul suivant :

   • $(1,01 \times 177,9) \times 3$ • $1,01^3 \times 177,9$ • $0,01^3 \times 177,9$

3. Entre 1997 et 2007 , l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage, du nombre de spectateurs est, arrondie à 0,01 % :

   • 1,77 % • 1,92 % • 3,57 %

4. Sachant que de 1998 à 1999, le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France a diminué de 10 %, le nombre de spectateurs (en millions) en 1998 arrondi au dixième était :

   • 139,6 • 170,7 • 138,2

5. On considère un nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 6$, construit à partir des données du tableau donné en début d'exercice. Les coordonnées du point moyen de ce nuage sont :

   • (2002 ; 169,55) • (5 ; 169,55) • (30 ; 1017,3)

6. Supposons que l'on ait effectué un ajustement affine du nuage de points par la méthode des moindres carrés. *(Dans l'équation de la droite de régression de y en x de la forme $y = ax+b$, on choisira les coefficients a et b arrondis au dixième).*
   D'après cet ajustement :

   (a) Le nombre de spectateurs sera d'environ 200 millions en :

   • 2015 • 2013 • 2010

   (b) L'estimation (en millions) arrondi au dixième, du nombre de spectateurs en 2015 est :

   • 11 439,6 • 228,4 • 206

Partie 2

Justifier la réponse donnée à la question 3 de la partie 1.

11.9 La Réunion 19 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.

Aucune justification n'est demandée. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

Le barème sera établi comme suit : pour une réponse exacte, 1 *point ; pour une réponse fausse ou l'absence de réponse,* 0 *point.*

1. On connaît les probabilités suivantes :
   $p(A) = 0,23$; $p(B) = 0,56$ et $p(A \cap B) = 0,11$. Alors :
   A. $p(A \cup B) = 0,79$ **B.** $p(A \cup B) = 0,68$ **C.** $p(A \cup B) = 0,9$
2. x est un réel strictement positif. La limite de $(1 - \ln x)$ en 0 est :
   A. 1 **B.** $-\infty$ **C.** $+\infty$
3. Le prix d'un article a doublé en dix ans. L'augmentation annuelle moyenne du prix de cet article, à 1 % près, est de :
   A. 7 % **B.** 10 % **C.** 50 %
4. Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de la fonction f, définie pour tout x réel par $f(x) = e^{3x}$:
   A. $F(x) = e^{3x}$ **B.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 5$ **C.** $F(x) = 3e^{3x} + 5$

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, donner les réponses sous forme de nombres décimaux qui ne seront pas arrondis.

Un concessionnaire automobile vend deux versions de voitures pour une marque donnée : routière ou break. Pour chaque version il existe deux motorisations : essence ou diesel. Le concessionnaire choisit au hasard un client ayant déjà acheté une voiture.

On note :

R l'évènement : « la voiture achetée est une routière » ;
B l'évènement : « la voiture achetée est une break » ;
E l'évènement : « la voiture est achetée avec une motorisation essence » ;
D l'évènement : « la voiture est achetée avec une motorisation diesel ».

On sait que :

- 65 % des clients achètent une voiture routière.
- Lorsqu'un client achète une voiture break, il choisit dans 85 % des cas la motorisation diesel.
- 27,3 % des clients achètent une voiture routière avec une motorisation diesel.

1. Quelle est la probabilité $p(R)$ de l'événement R ?
2. (a) Construire l'arbre de probabilité complet.
   (b) Démontrer que $P_R(D) = 0,42$ (probabilité de D sachant R).
3. Calculer $p(D)$.
4. Lorsque le concessionnaire a choisi au hasard un client, on note x le prix de vente (en milliers d'euros) de la voiture achetée.
   Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de x.

Version	Routière		Break	
Motorisation	Essence	Diesel	Essence	Diesel
x_i : prix de vente (en milliers d'euros)	15	18	17	20
P_i : probabilité		0,273		

Calculer l'espérance mathématique de x. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

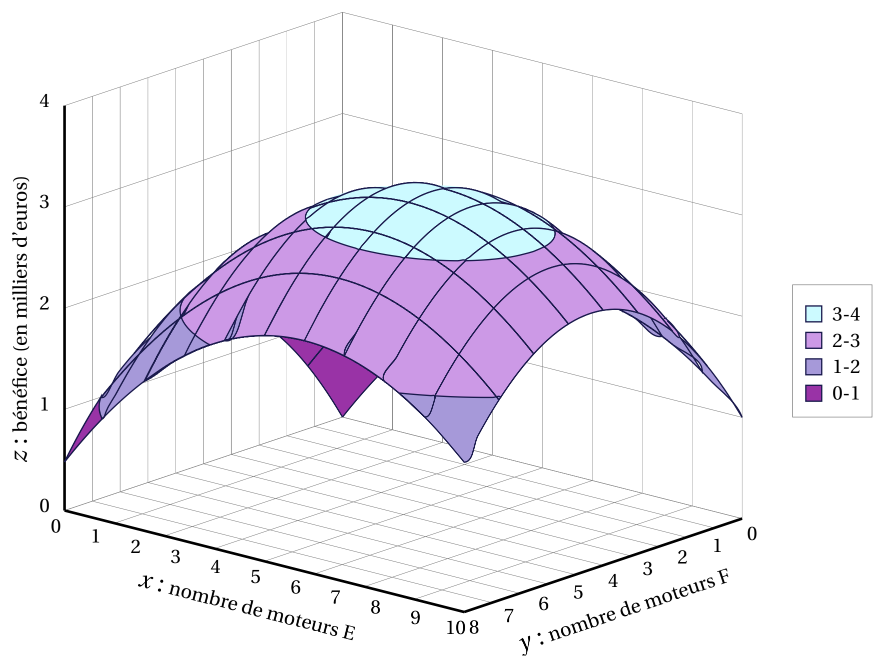
Une usine produit deux types E et F de moteurs.
Le bénéfice B, exprimé en milliers d'euros, pour une production journalière de x moteurs E et y moteurs F est :

$$B(x\,;\,y) = -0,05x^2 - 0,08y^2 + 0,6x + 0,7y.$$

On admet que la production totale est vendue et que $0 \leqslant x \leqslant 10$; $0 \leqslant y \leqslant 8$.

1. Calculer le bénéfice réalisé avec :
   (a) Une production de 7 moteurs E et de 5 moteurs F.
   (b) Une production de 10 moteurs E et aucun moteur F.
2. La fonction B est représentée par la surface S (figure ci-dessous).
   L'usine veut obtenir un bénéfice dépassant 3 000 €. Par lecture graphique de B :
   (a) Si l'usine fabrique 6 moteurs F, indiquer le nombre de moteurs E qu'il faut produire pour atteindre cet objectif. Préciser les différentes possibilités.
   (b) Si l'usine fabrique 8 moteurs E, indiquer le nombre de moteurs F qu'il faut produire pour atteindre cet objectif. Préciser les différentes possibilités.

Représentation graphique du bénéfice B



3. La demande contraint l'usine à fabriquer autant de moteurs E que de moteurs F. Dans ce cas :
   (a) Exprimer, en fonction de x, le bénéfice B réalisé, lorsque x varie de 0 à 8.
   (b) Déterminer la production permettant de réaliser le bénéfice maximal.
   Calculer ce bénéfice maximal exprimé en euros.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

La ville de Sirap étudie les flux de sa population et enregistre, chaque année, y centaines de nouveaux résidants et z centaines de résidants quittant la ville.

Le tableau ci-dessous indique les flux pour cinq années :

Année	2000	2002	2004	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	7
Nouveaux résidants (en centaines) : y_i	9,71	10,95	10,83	11,95	11,99
Départs de résidants (en centaines) : z_i	9,6	11,79	12,63	12,9	13,18

Partie A

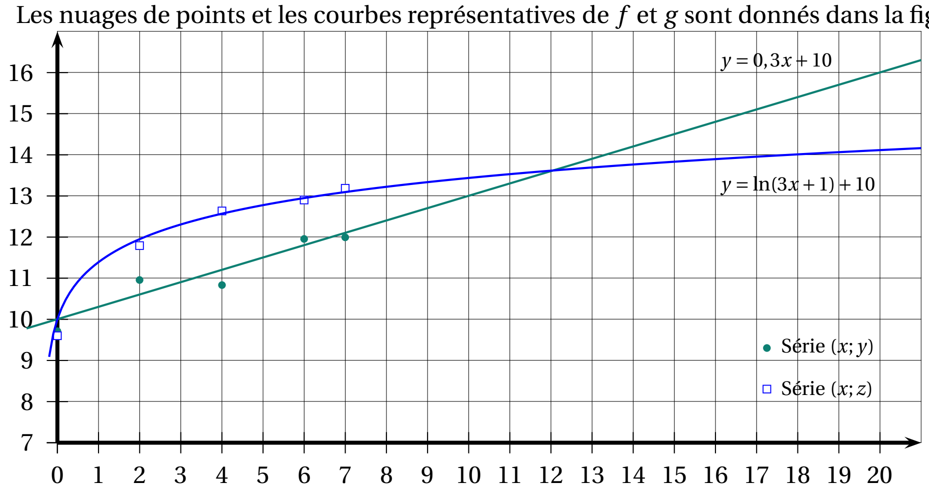
Pour la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ donner une équation de la droite d'ajustement $\mathcal{D}$ de y en x, obtenue par la méthode des moindre carrés (arrondir les coefficients au centième).

Partie B

Dans toute la suite de l'exercice 4, on admettra le modèle d'ajustement $y = f(x)$ et $y = g(x)$ avec :

$$f(x) = 0,3x + 10 \text{ pour la série } \left(x_i\ ;\ y_i\right) \text{ et } g(x) = \ln(3x+1) + 10 \text{ pour la série} \left(x_i\ ;\ z_i\right).$$

Les nuages de points et les courbes représentatives de f et g sont donnés dans la figure ci-dessous :



1. En utilisant ces ajustements :
   (a) Calculer à partir de quelle année le nombre de nouveaux résidants dépasserait 1 400.
   (b) Calculer à partir de quelle année le nombre de départs de résidants dépasserait 1 400.

   On considère la fonction d définie sur $[0\,;\,20]$ par

$$d(x) = g(x) - f(x) = \ln(3x+1) - 0,3x.$$

   On note d' la dérivée de d.

2. Calculer $d'(x)$ et en donner une écriture sous forme d'un quotient. Étudier son signe et construire le tableau de variations de la fonction d.
3. Montrer que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[3\,;\,20]$.
   À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
4. En considérant ces ajustements et en tenant compte uniquement des départs et des arrivées de résidants :
   (a) En quelle année la ville de Sirap enregistre la plus grande baisse de sa population ?
   Estimer alors cette baisse.
   (b) À partir de quelle année la ville de Sirap peut-elle prévoir une augmentation de sa population ?