Un corrigé du baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (5 points).

Pour les candidats de la série ES

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour. On modélise le coût total de production par une fonction C. Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros. La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe page suivante.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?

   $450 = 4,5$ centaines d'objets ce qui donne environ 240 centaines d'euros soit 24 000 €.

2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ?

   60 000 €= 600 centaines d'euros ce qui donne environ 6,5 centaines d'objets produits soit 650 objets produits.

3. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

   (a) Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.

   Le coût marginal en a sera alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
   Pour 450 objets, c'est-à-dire $x = 4,5$ la tangente semble parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc le coût marginal est égal à 0.
   Pour 600 objets, c'est-à-dire $x = 6$ la tangente semble être celle qu'on a tracée avec un coefficient directeur d'environ 300 centaines d'euros pour une centaine d'objets soit 300 euros par objet.

   (b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0 ; 7]$ » ?

   Cette affirmation est fausse : si la dérivée du coût était croissante, la fonction serait convexe, or sur $[0; 4,5]$ (environ) elle est concave, étant clairement en dessous de ses tangentes sur cet intervalle et elle ne devient convexe qu'à partir de 4,5 (environ).

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ».
   Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0 ; 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.

   Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.

   Cette fonction est linéaire donc $r(0) = 0$ et, par ailleurs, pour 7 centaines d'objets vendus, la recette est de 52 500 €= 525 centaines d'euros donc $r(7) = 525$.
   On a donc deux points pour tracer la droite : $(0; 0)$ et $(7; 525)$.

2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

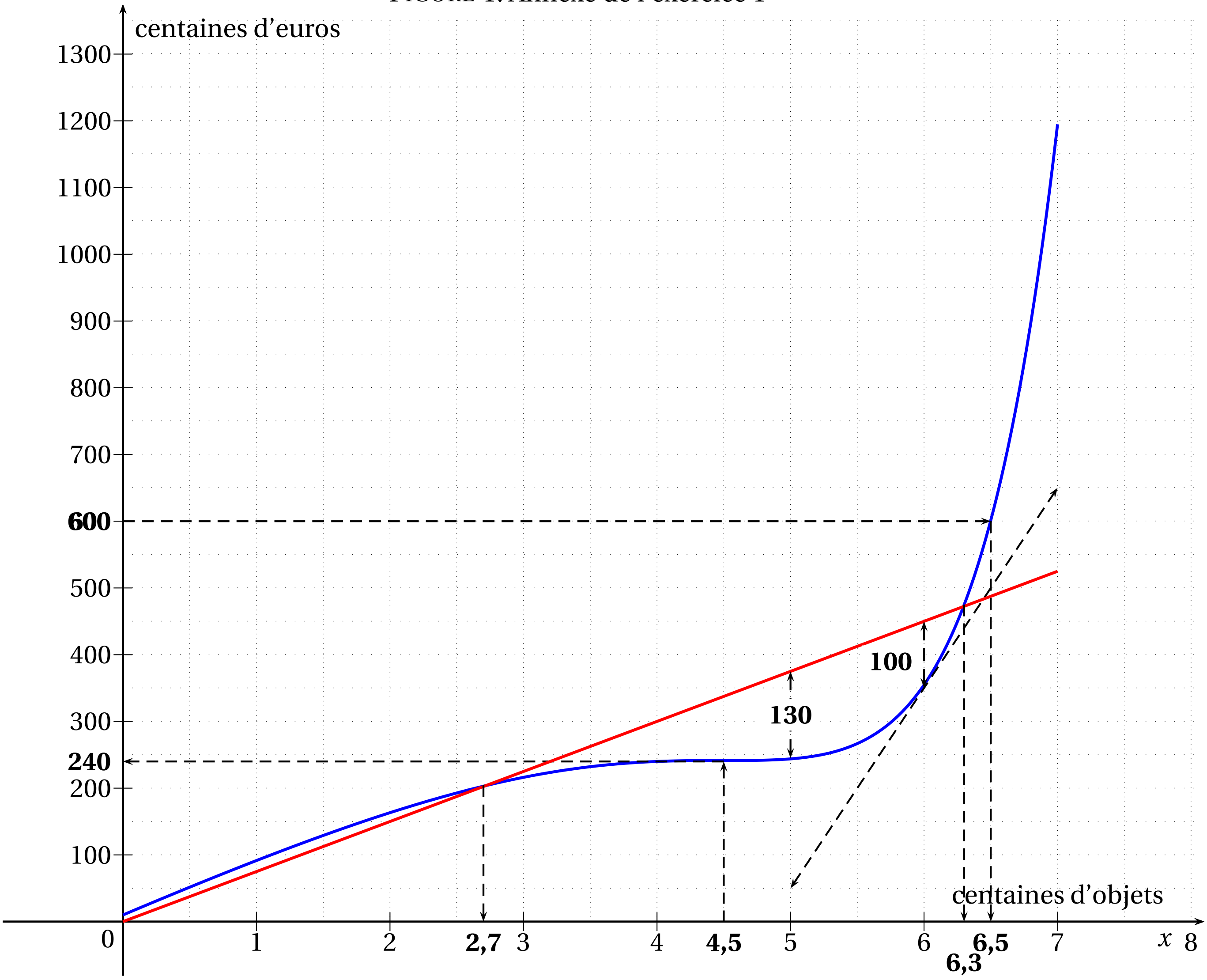
   (a) En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.

   On cherche l'intervalle sur lequel l'entreprise est rentable c'est-à-dire sur lequel la droite est au-dessus de la courbe. Cela semble être sur l'intervalle $[2,7; 6,3]$. La fourchette maximale de rentabilité est donc entre 270 et 630 objets.

   (b) Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

Pour $x = 5$ le bénéfice est d'environ 130 centaines d'euros, comme en témoigne l'écart entre la droite de la recette et la courbe du coût, alors que pour $x = 6$ il est d'environ 100 centaines d'euros donc, effectivement, il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets : son bénéfice sera supérieur.

FIGURE 1: Annexe de l'exercice 1



EXERCICE 2 (5 points).

Commun à tous les candidats

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.

Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochent aussitôt (ou se déclarent immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.

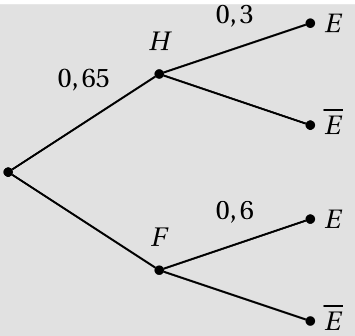
On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier *clients*. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note :

- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » ;
- $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.



2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.

   $E \cap F$ est l'évènement « La personne choisie est une femme et elle écoute les explications du démarcheur ».
   $p(E \cap F) = p(F) \times p_F(E) = (1 - 0,65) \times 0,6 = 0,21$.

   (b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.

   On cherche $p(E)$, or H et F réalisent une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités conditionnelles totales :
   $p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap H) = 0,21 + 0,65 \times 0,3 = 0,21 + 0,195 = 0,405$.
   Donc la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est bien égale à 0,405.

   (c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? *On donnera le résultat arrondi au centième.*

   On cherche $p_E(H)$.
   $p_E(H) = \frac{p(E \cap H)}{p(E)} = \frac{0,195}{0,405} \approx 0,48$.
   La probabilité que la personne qui écoute soit un homme est donc environ égale à 0,48.

PARTIE B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   Chaque personne est une épreuve de BERNOULLI dont le succès est « la personne interrogée souscrit à ce nouveau forfait » d'une probabilité $p = 0,12$.
   Les choix de personnes sont considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques, on est donc en présence d'un schéma de BERNOULLI avec $n = 60$.
   On s'intéresse au nombre X de succès.
   Donc X suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,12$ et $n = 60$.

2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. *On arrondira le résultat au centième.*

   $p(X = 5) = \binom{60}{5} 0,12^5 (1 - 0,12)^{55} \approx 0,12$.
   La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions est envirion égale à 0,12.

3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix millième.*

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X \leqslant 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,12^{60} \approx 0,9995$. La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est d'environ 0,999 5.

4. Combien de souscriptions chaque employé peut-il espérer par jour ?

$E(X) = n \times p = 60 \times 0,12 = 7,2$.
Chaque employé peut donc espérer 7,2 souscriptions par jour sur 60 appels.

EXERCICE 3 (5 points).
Pour les candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et pour les candidats de la série L
Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

PARTIE A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année.
Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes au 1er janvier 2005.

$u_1 = u_0\left(1 - \frac{15}{100}\right) = u_0 \times 0,85 = 21250$.
Au 1er janvier 2005 l'effectif de cette population est donc de 21 250 individus.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25000 \times 0,85^n$.

Diminuer de 15 % revient à multiplier par 0,85, la suite est donc géométrique de premier terme $u_0 = 25000$ et de raison $q = 0,85$, donc $u_n = u_0 \times q^n = 25000 \times 0,85^n$.

3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

   Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L4 :	Traitement	Tant que $\underline{u > 5000}$ faire
L5 :		u prend la valeur $\underline{u \times 0,85}$
L6 :		n prend la valeur $\underline{n+1}$

4. Déterminer la valeur n que renvoie l'algorithme.

L'algorithme programmé sur une calculatrice renvoie 10.

PARTIE B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite.
Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.

Comme un quart des singes disparaît, il n'en reste que 75 % = 0,75 auxquels s'ajoutent les 400 naissances. D'où $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 1\,600 \\ &= 0,75 \times v_n + 400 - 1\,600 \\ &= 0,75 \times v_n - 1\,200 \\ &= 0,75\left(v_n - \frac{1\,200}{0,75}\right) \\ &= 0,75\,(v_n - 1\,600) \\ &= 0,75\,w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1\,600 = 3\,400$.

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

(w_n) étant géométrique, $w_n = w_0 \times q^n = 3\,400 \times 0,75^n$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.

$w_n = 3\,400 \times 0,75^n = v_n - 1\,600 \Leftrightarrow v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.

(d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

Comme $0,75 < 1$, $\lim 0,75^n = 0$ donc $\lim v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0 = 1\,600$.
Le nombre d'individus va tendre vers 1 600.

EXERCICE 4 (5 points)**.**
Pour les candidats de la série ES

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par $f(x) = (200x - 300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10$.

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

Partie A : objectif « réaliser un bénéfice maximal »

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.

Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,6]$, $f'(x) = (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$.

$f = u \times v + w$ où $u(x) = 200x - 300$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x-1}$ et $w(x) = 10$.
$f' = u' \times v + u \times v' + w'$ or $u'(x) = 200$, $v'(x) = (-1)\mathrm{e}^{-x-1}$ et $w'(x) = 0$.
Donc :
$f'(x) = 200\mathrm{e}^{-x-1} + (200x - 300)(-1)\mathrm{e}^{-x-1} + 0 = [200 + (200x - 300)(-1)]\,\mathrm{e}^{-x-1} = (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
On indiquera les valeurs approchées des extremuns arrondies au millième.

$\mathrm{e}^X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$ donc $f'(x)$ sera du signe de $500 - 200x$, d'où :

x	0		2,5		6
$f'(x)$		+	0	−	
f	−100,364	↗	16,039	↘	10,821

3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).

Il faut vendre 2,5 centaines d'objets, soit 250 pour un bénéfice maximal de 16,039 milliers d'euros, soit 16 039 €.

4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser entièrement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.

   On peut prendre xmin= 0, xmax= 6, ymin= -101 et ymax= 17.

Partie B : objectif « ne pas vendre à perte »

1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

   Cela semble être à partir de 1,1 centaine d'objets et jusqu'à 6 centaines, soit entre 110 (environ) et 600 objets.

2. Démontrer que sur l'intervalle [1 ; 2] l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.

   D'après le tableau de variations, $f(x)$ ne peut s'annuler qu'entre 0 et 2,5. Sur cet intervalle, f est continue et strictement croissante. Par ailleurs $f(1) \approx -3,5 < 0 < f(2) = 14,9$ donc, d'apré le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution α et elle est située entre 1 et 2.

3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   D'après la calculatrice :

x	1,09	α	1,10
$f(x)$	$-0,1$	0	$0,2$

   Donc $\alpha \approx 1,09$ par défaut (ou $\alpha \approx 1,10$ par excès).

4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

   À partir de 1,10 centaines, soit 110 objets, le bénéfice est positif, donc l'entreprise ne vend pas à perte.

Partie C : objectif « étudier la croissance du bénéfice »

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer le nombre d'objets à partir duquel la croissance du bénéfice est minimale.

La croissance du bénéfice est donnée par f'. On cherche donc les variations de f' pour savoir quand elle est minimale.

Pour cela il nous faut étudier le signe de la dérivée seconde de f.

On sait que $f' = u \times v$ avec $u(x) = 500 - 200x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x-1}$.

Donc $f'' = u' \times v + u \times v'$ or $u'(x) = -200$ et $v'(x) = (-1)\mathrm{e}^{-x-1}$.

D'où $f''(x) = -200\mathrm{e}^{-x-1} + (500 - 200x)(-1)\mathrm{e}^{-x-1} = [-200 + (500 - 200x)(-1)]\,\mathrm{e}^{-x-1} = (200x - 700)\mathrm{e}^{-x-1}$.

Comme $\mathrm{e}^X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de $200x - 700$ donc :

x	0		$3,5$		6
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		↘		↗	

La croissance du bénéfice sera donc minimale pour 3,5 centaines d'objets, soit 350 objets.