BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2016

Épreuve :
MATHÉMATIQUES

Série
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES, toutes spécialités

Classes
TES1, TES2, TES3, TES4

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le barème n'est qu'indicatif.

Le sujet comporte 7 pages.

EXERCICE 1 (5 points).
Pour les candidats de la série ES

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.
On modélise le coût total de production par une fonction C.
Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.
La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe page 7.

Partie A
Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?
2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ?
3. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.
   (a) Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.
   (b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ » ?

Partie B
Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ».
   Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\,;\,7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
   Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.
2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.
   (a) En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.
   (b) Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

EXERCICE 2 (5 points).
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.
Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochent aussitôt (ou se déclarent immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.
On admet que ces proportions restent stables.

Partie A
On choisit au hasard une personne dans le fichier *clients*. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note :

- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » ;
- $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

Rappel des notations :
Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
   (b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.
   (c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? *On donnera le résultat arrondi au centième.*

PARTIE B
Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. *On arrondira le résultat au centième.*
3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix millième.*
4. Combien de souscriptions chaque employé peut-il espérer par jour ?

EXERCICE 3 (5 points).
Pour les candidats de la série ES <u>n'ayant pas suivi</u> l'enseignement de spécialité et pour les candidats de la série L

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

PARTIE A
Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1^er^ janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1^er^ janvier de chaque année.
Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1^er^ janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes au 1^er^ janvier 2005.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25000 \times 0,85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1^er^ janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

   Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ....
L6 :		n prend la valeur ....
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Déterminer la valeur n que renvoie l'algorithme.
   On indiquera comment cette réponse a été obtenue.

PARTIE B
Au 1^er^ janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite.
Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1^er^ janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0,75^n$.
   (d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 (5 points).
Pour les candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

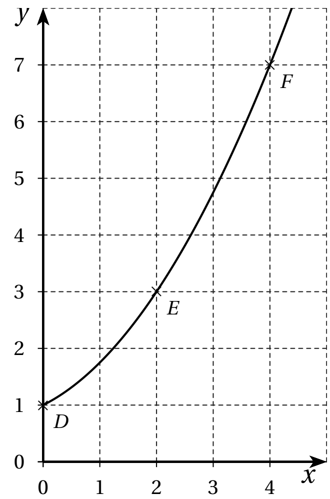
Les parties A et B sont indépendantes

Stéphanie a lancé un réseau d'agences de location de vélos en Bretagne. Depuis 2012, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi on comptait 10 agences en 1er janvier 2012, puis 30 au 1er janvier 2014 et enfin 70 au 1er janvier 2016.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2012 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en dizaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2012.

Sur le dessin ci-contre, on a représenté graphiquement la fonction f.



PARTIE A

On cherche à déterminer la valeur des cœfficients a, b et c.

1. (a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations $\mathscr{S}$ traduisant cette situation.

   (b) En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec

   $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

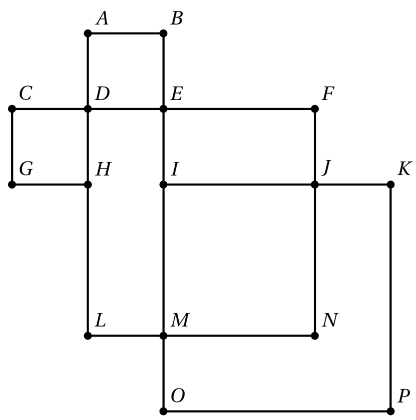
2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des cœfficients a, b et c, en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2018.

PARTIE B

Stéphanie a représenté par le graphe ci-dessous toutes les villes dans lesquelles se trouvent les agences qu'elle doit visiter chaque mois. Dans ce graphe, les arêtes sont les axes routiers et les sommets sont les villes.



1. (a) Déterminer si le graphe est connexe.

   (b) Déterminer si le graphe est complet.

   Stéphanie voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque ville dans laquelle se trouve une agence de location de vélos.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

   (a) La ville d'arrivée est la même que la ville de départ.

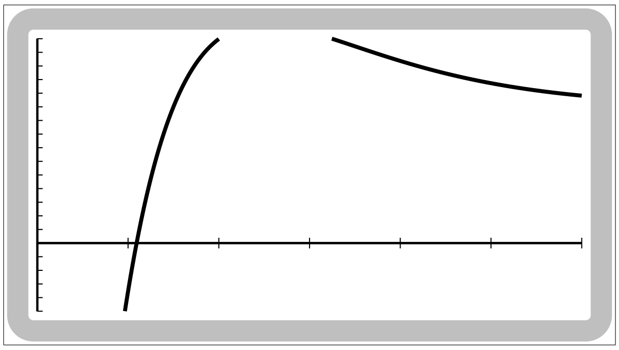
   (b) La ville d'arrivée n'est pas la même que la ville de départ.

EXERCICE 4 (5 points).
Pour les candidats de la série ES

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par

$$f(x) = (200x - 300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.



Partie A : objectif « réaliser un bénéfice maximal »
L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.
Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,6]$,

$$f'(x) = (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
   On indiquera les valeurs approchées des extremuns arrondies au millième.
3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser entièrement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.

Partie B : objectif « ne pas vendre à perte »

1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

Partie C : objectif « étudier la croissance du bénéfice »
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Déterminer le nombre d'objets à partir duquel la croissance du bénéfice est minimale.

ANNEXE : Exercice 1

À rendre avec sa copie.