Annexe A

Retour sur la notion de dérivation

Sommaire

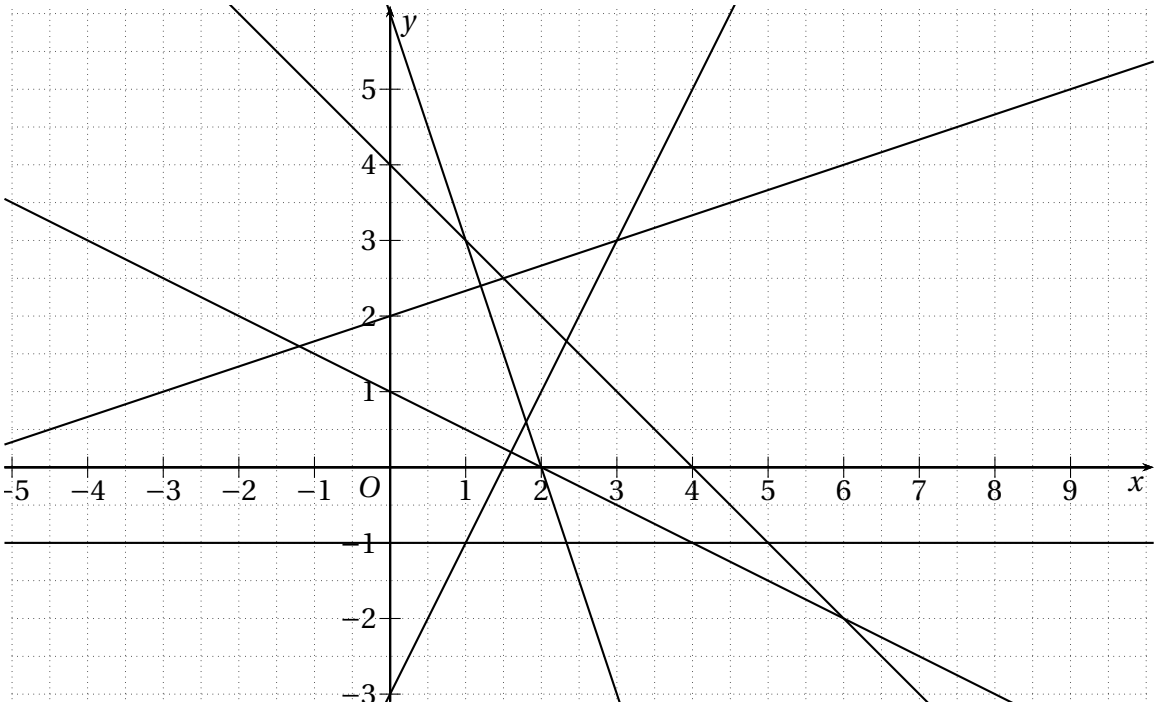
A.1 Nombres dérivés . . . . . **ii**
A.1.1 Prérequis ii
A.1.2 Lectures graphiques de nombres dérivés iii
A.2 Fonction dérivée . . . . . **v**
A.2.1 Activités v
A.2.2 Bilan et compléments xi
A.3 Exercices . . . . . **xii**
A.3.1 Lectures graphiques et fonctions dérivées xii
A.3.2 Calculs et dérivées xiv

A.1 Nombres dérivés

A.1.1 Prérequis

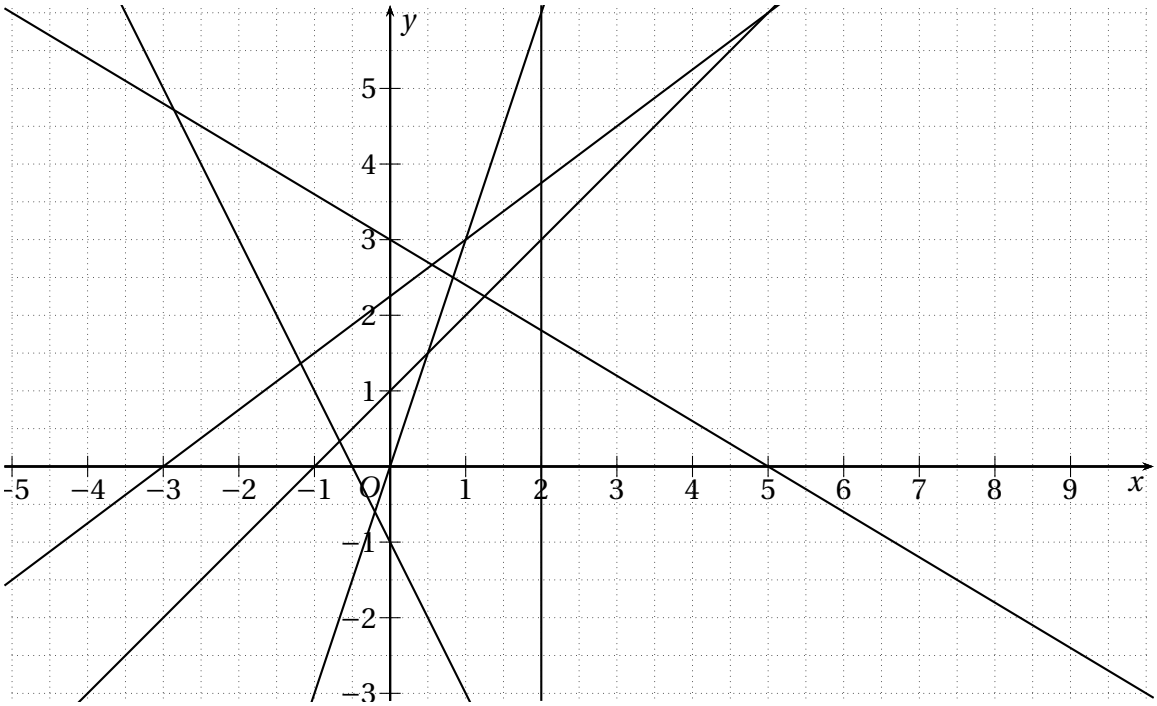
ACTIVITÉ A.1. 1. Déterminer graphiquement les coefficients directeurs m des droites de la figure A.1 de la présente page (on les indiquera sur le graphique).

FIGURE A.1: Figure de l'exercice A.1



2. Même question pour les droites de la figure A.2 de la présente page.

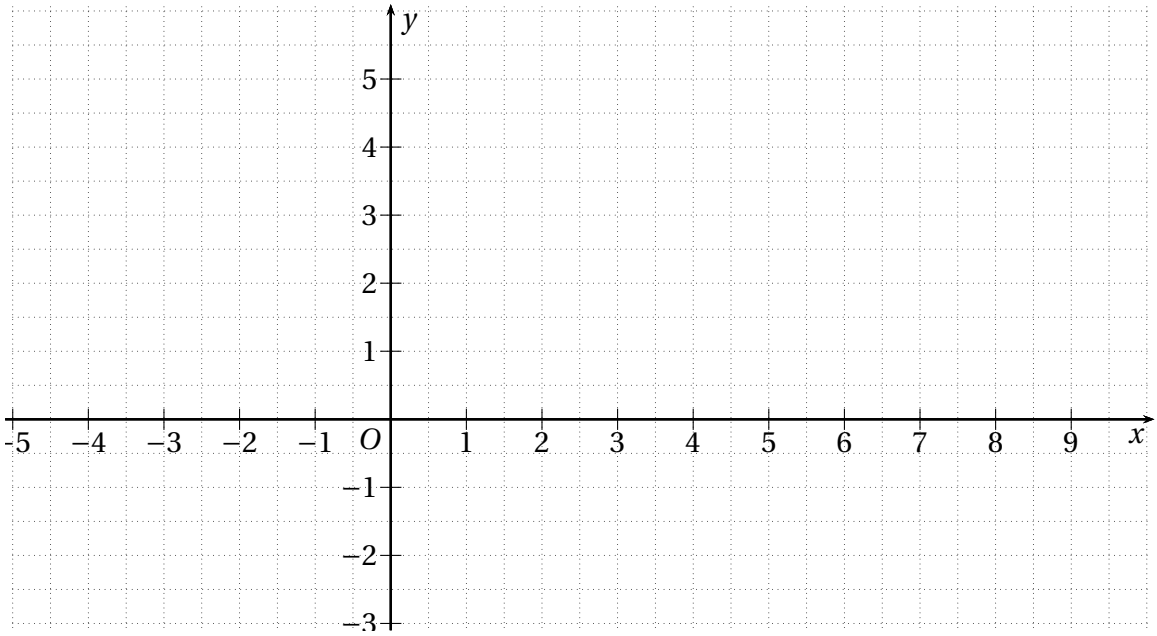
FIGURE A.2: Figure de l'exercice A.1



ACTIVITÉ A.2.
Dans le repère de la figure A.3 de la présente page, représenter les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A\,(0\,;1)$ et de coefficient directeur $m = 2$;
- $\mathscr{D}_2$ passant par le point $B\,(1\,;0)$ et de coefficient directeur $m = -1$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par le point $C\,(-1\,;-1)$ et de coefficient directeur $m = \frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_4$ passant par le point $D\,(1\,;2)$ et de coefficient directeur $m = -\frac{2}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par le point $E\,(2\,;-3)$ et de coefficient directeur $m = \frac{3}{5}$;
- $\mathscr{D}_6$ passant par le point $A\,(0\,;3)$ et de coefficient directeur $m = 0$;

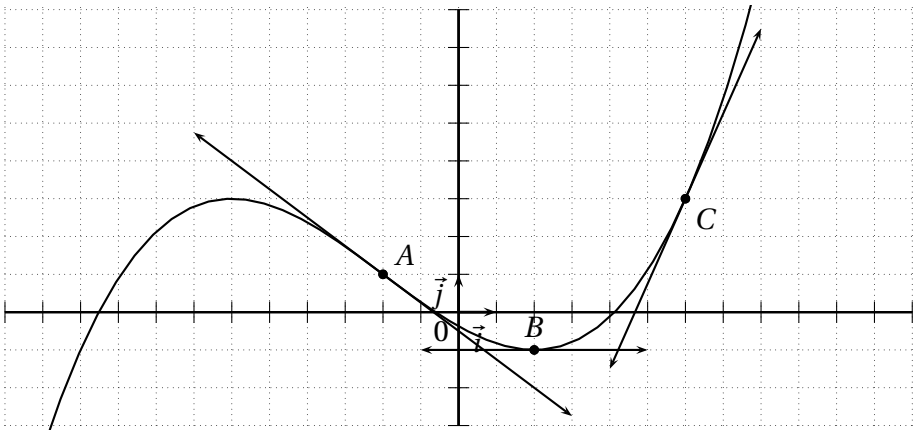
FIGURE A.3: Figure de l'exercice A.2



A.1.2 Lectures graphiques de nombres dérivés

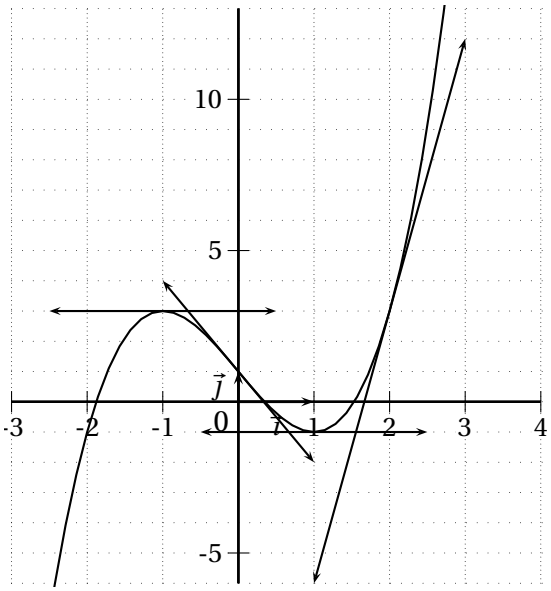
EXERCICE A.1.
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

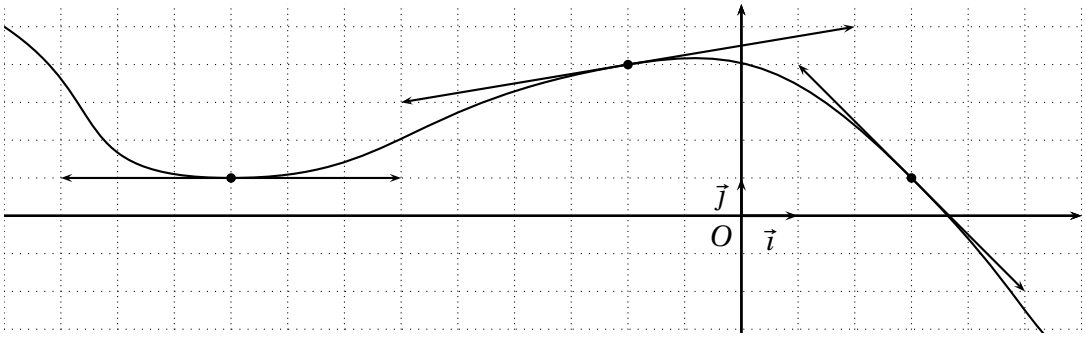


EXERCICE A.2.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1\,;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.



EXERCICE A.3.
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

EXERCICE A.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3\,;0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- $f(3) = 9$.

EXERCICE A.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

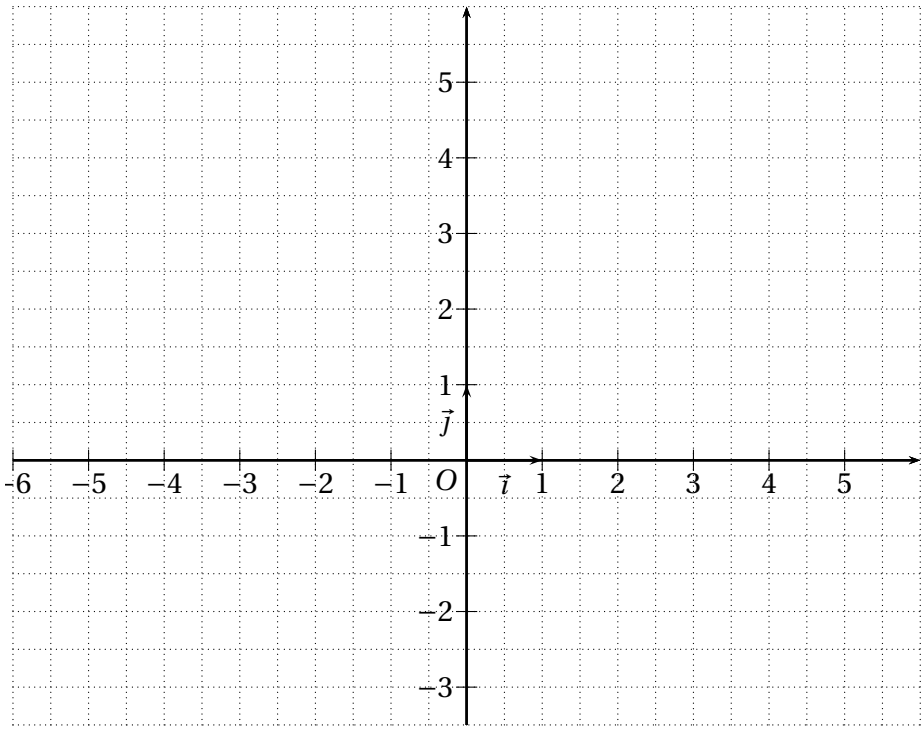
EXERCICE A.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

EXERCICE A.7.
Tracer sur le repère ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

- f est définie sur $[-5\,;5]$;
- $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$;
- $f'(0) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(4) = 3$.

On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.

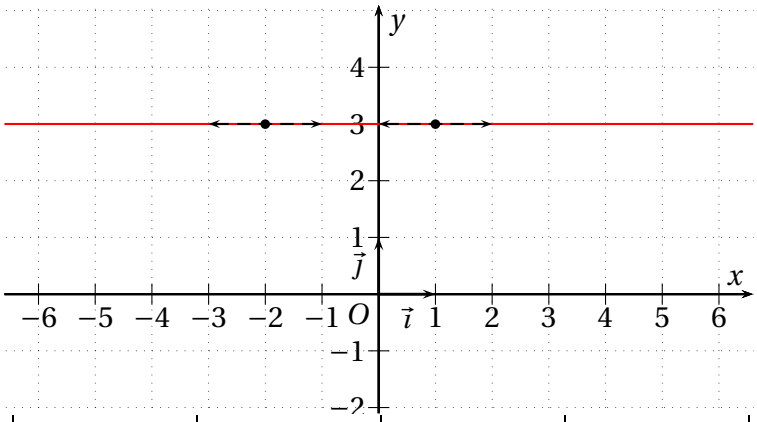


A.2 Fonction dérivée

A.2.1 Activités

ACTIVITÉ A.3 (Fonctions dérivées des fonctions usuelles)**.**
Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et conjecturer l'expression de $f'(x)$.

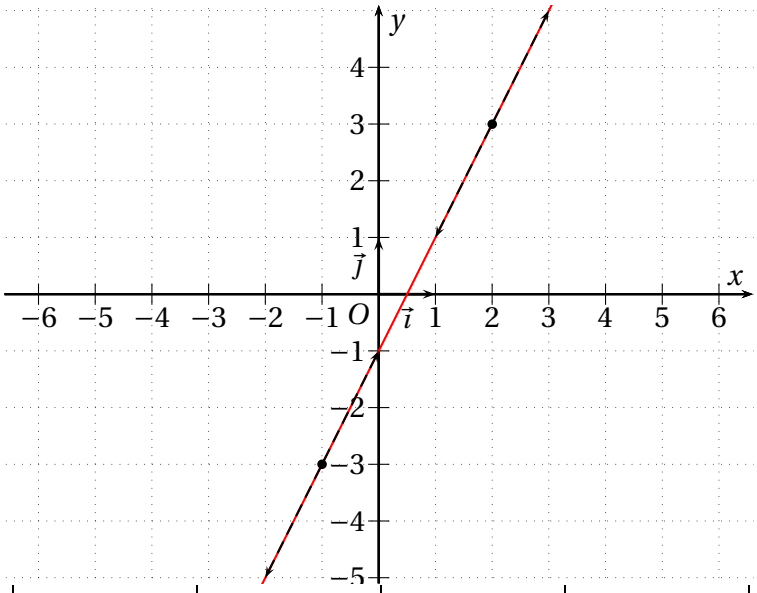
FIGURE A.4: Fonction constante : $f(x) = 3$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

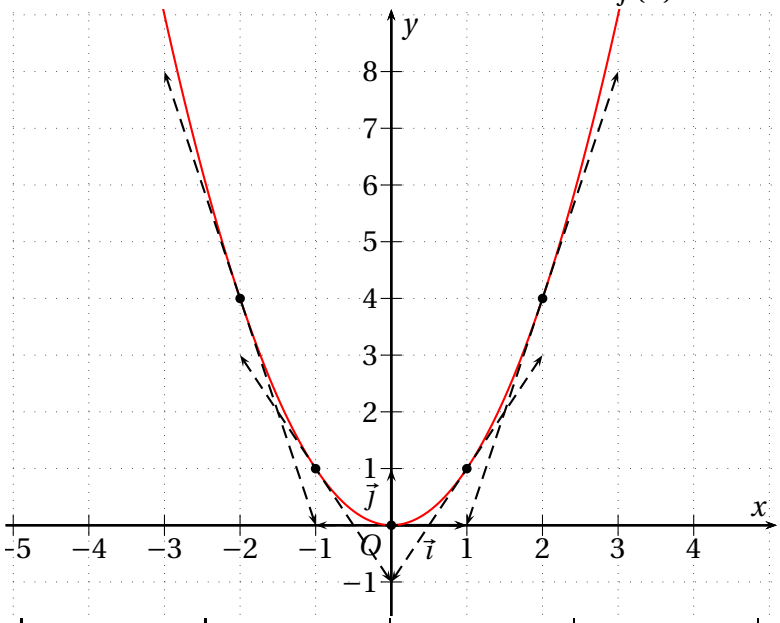
FIGURE A.5: Fonction affine : $f(x) = 2x - 1$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

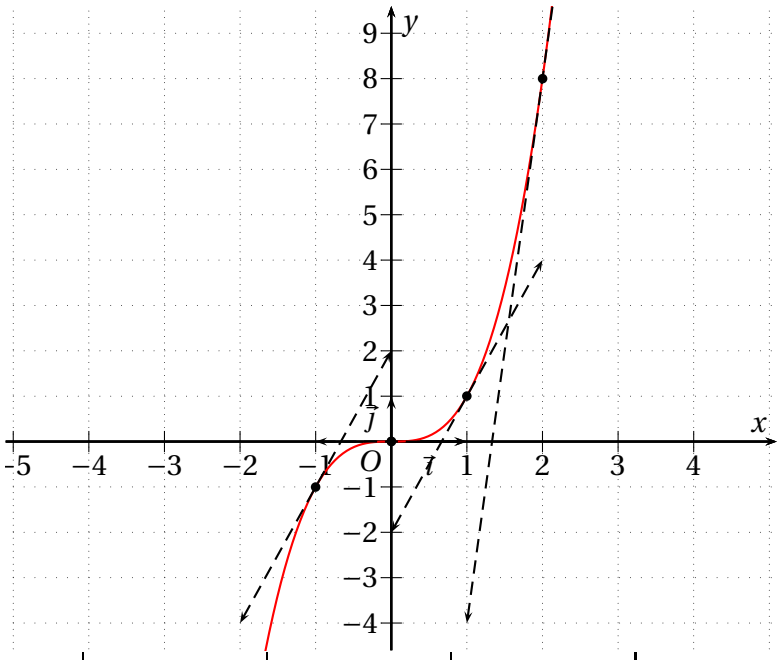
FIGURE A.6: Fonction carrée : $f(x) = x^2$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

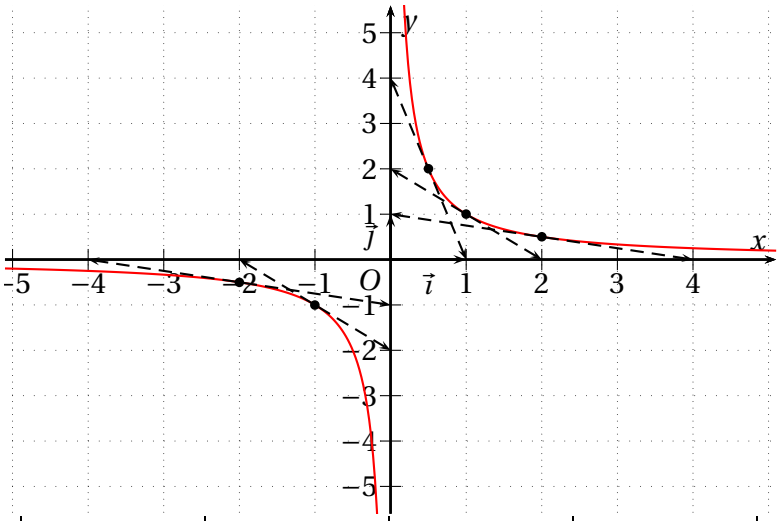
FIGURE A.7: Fonction cube : $f(x) = x^3$



x	-1	0	1	2
$f'(x)$				

$f'(x) = \ldots\ldots$

FIGURE A.8: Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$

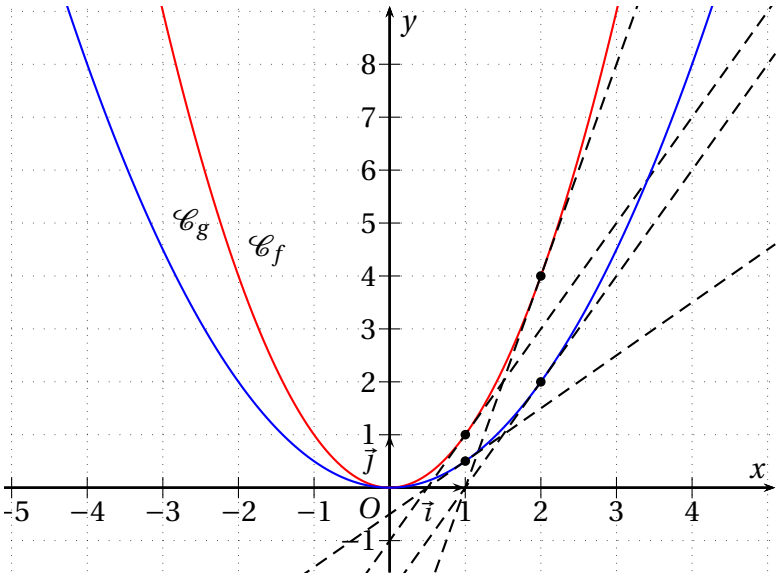


x	-2	-1	$0,5$	1	2
$f'(x)$					

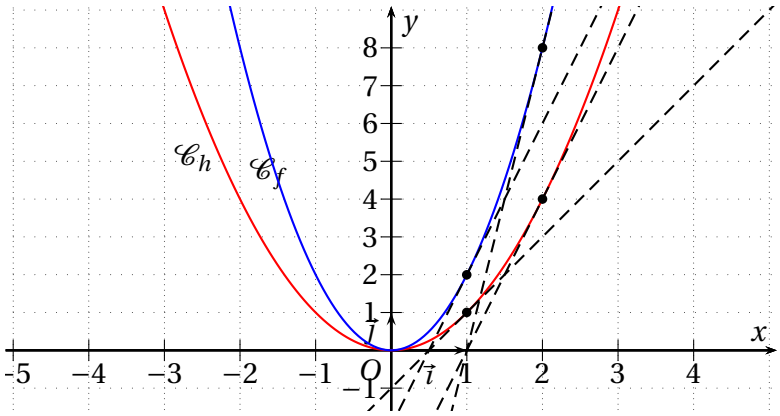
$f'(x) = \ldots\ldots$

ACTIVITÉ A.4 (Fonction dérivée du produit d'une fonction par une constante)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.
   Sur la figure ci-dessous :
   (a) Déterminer par lecture graphique $f'(1)$ et $g'(1)$.
   (b) Déterminer par lecture graphique $f'(2)$ et $g'(2)$.
   (c) Conjecturer l'expression de $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$.



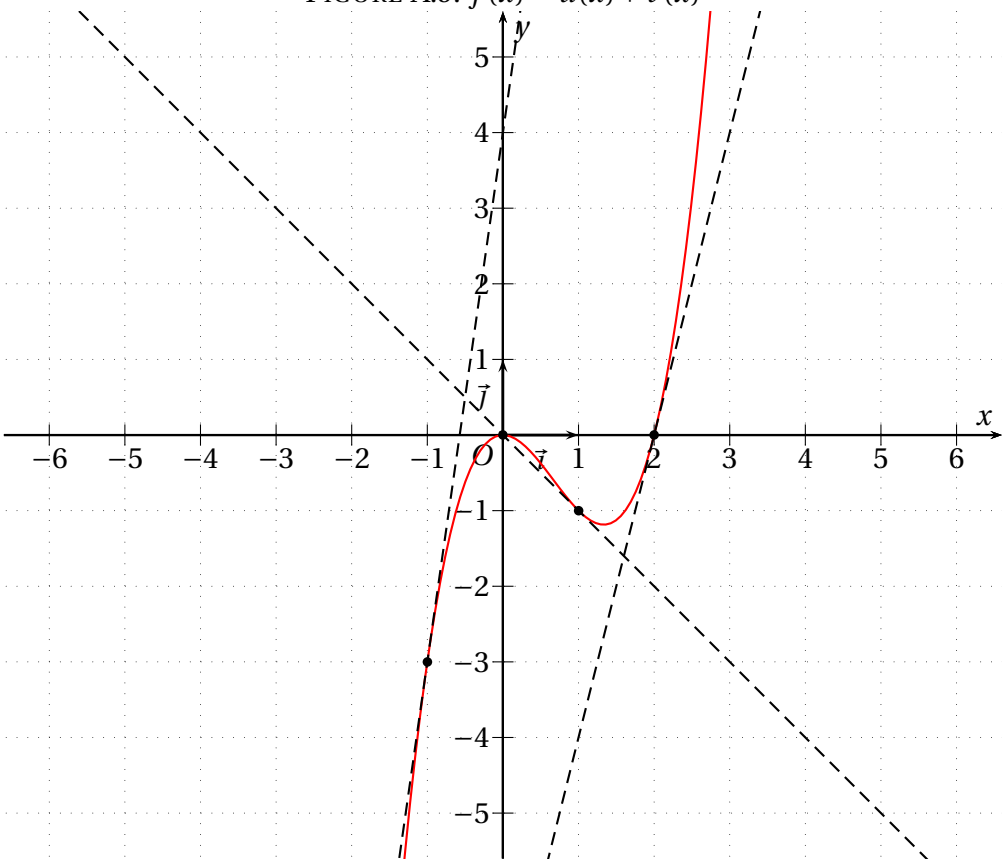
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.
   (a) D'après votre précédente conjecture, déterminer quelle devrait être $h'(x)$.
   (b) Vérifier votre conjecture sur le graphique de la figure suivante.



ACTIVITÉ A.5 (Fonction dérivée d'une somme de fonction).

1. Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.
   (a) Déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) On donne sur la figure A.9 de la présente page la courbe représentative de f ainsi que quelques tangentes.
   À l'aide de la question précédente et de la figure, compléter le tableau suivant :

FIGURE A.9: $f(x) = u(x) + v(x)$



x	-1	0	1	2
$u'(x)$				
$v'(x)$				
$f'(x)$				

   (c) Conjecturer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $v'(x)$.

2. Soient l, m et g trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = x^2$, $m(x) = x - 2$ et $g(x) = l(x) \times m(x)$.
   (a) Déterminer $l'(x)$ et $m'(x)$.
   (b) Montrer que $g(x) = f(x)$.
   (c) Compléter alors le tableau suivant :

x	-1	0	1	2
$l'(x)$				
$m'(x)$				
$g'(x)$				

(d) Quelle formule « intuitive » est fausse ?

A.2.2 Bilan et compléments

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**définie sur**
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+} =]0\,;+\infty[$

Opérations algébriques et dérivation

Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Les fonctions dérivées sont données dans le tableau ci-dessous :

Fonction	**Fonction dérivée**
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Variations et fonction dérivée

Propriété A.1. *Soit f une fonction dérivable et définie sur un intervalle I. On note f' sa fonction dérivée. On a alors :*

- *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$;*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.*

A.3 Exercices

A.3.1 Lectures graphiques et fonctions dérivées

EXERCICE A.8.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 ci-dessousreprésente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*

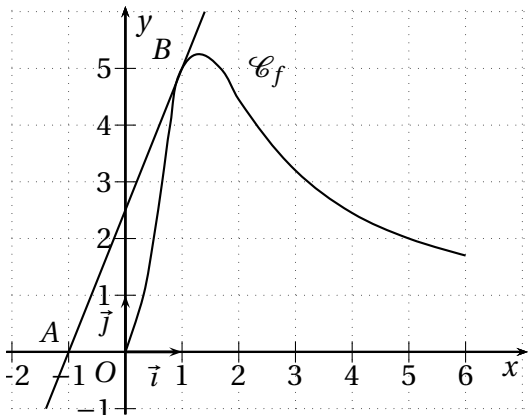


Figure 1

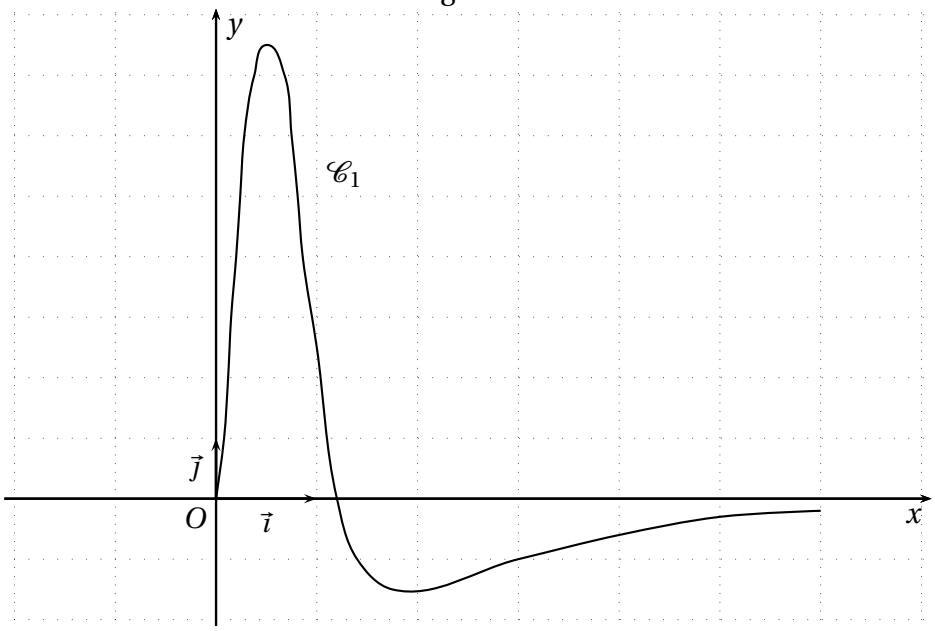


Figure 2

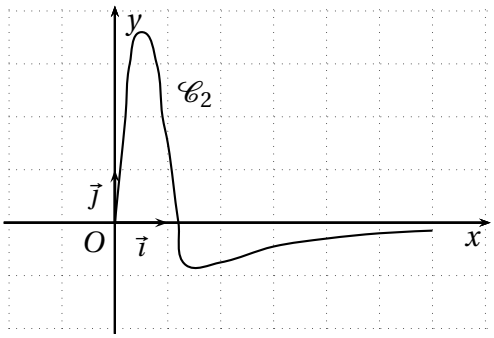
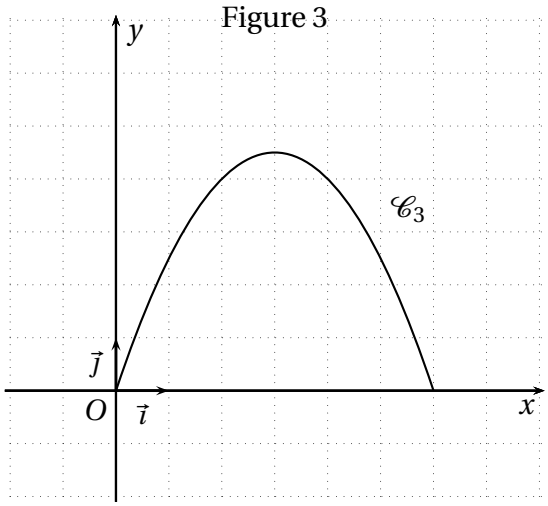
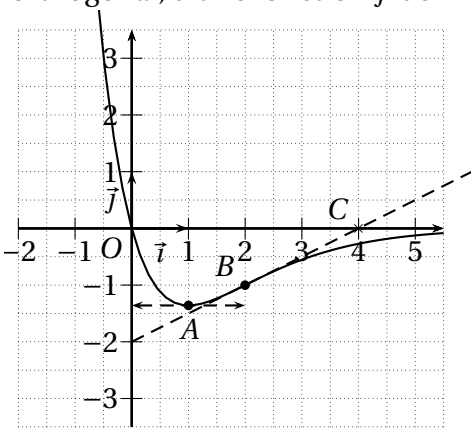


Figure 3



EXERCICE A.9.

La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure ci-dessous est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

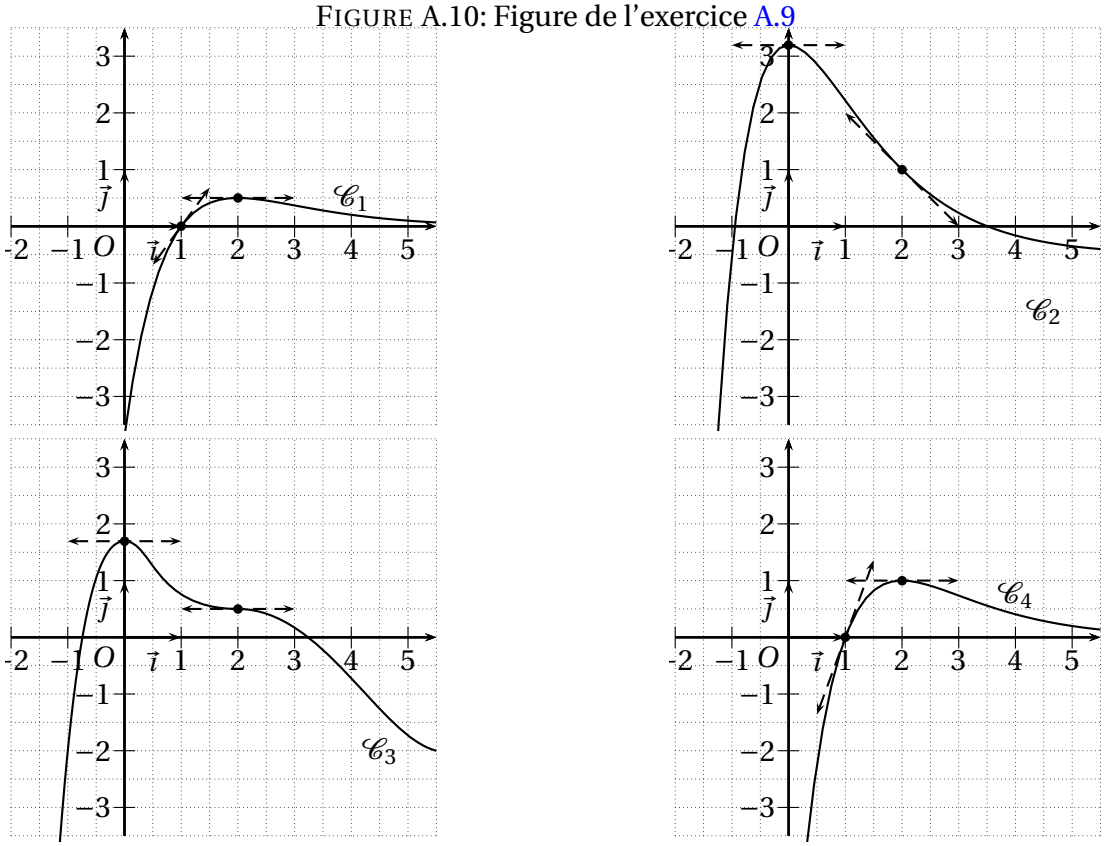


On donne les renseignements suivants :

- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B\,(2\,;-1)$ appartient à $(\mathscr{C})$;
- la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point B passe par le point $C\,(4\,;0)$;

1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques de la figure A.10 de la présente page, représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une fonction h telle que $h' = f$. En justifiant vos choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques* :
   (a) déterminer la courbe associée à la fonction f'.
   (b) déterminer la courbe associée à la fonction h.

FIGURE A.10: Figure de l'exercice A.9



A.3.2 Calculs et dérivées

EXERCICE A.10.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$
4. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
5. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
6. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
7. $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$;

EXERCICE A.11.
Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

EXERCICE A.12.
On donne $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0;2]$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Tracer les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de f.

EXERCICE A.13.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

EXERCICE A.14.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et $\mathscr{C}$.
4. (a) À l'aide du graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées de ces solutions, à 10^{-1} près.

EXERCICE A.15.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

EXERCICE A.16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

EXERCICE A.17.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient direteur -3.

EXERCICE A.18.
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne sur la figure A.11 page xvi un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

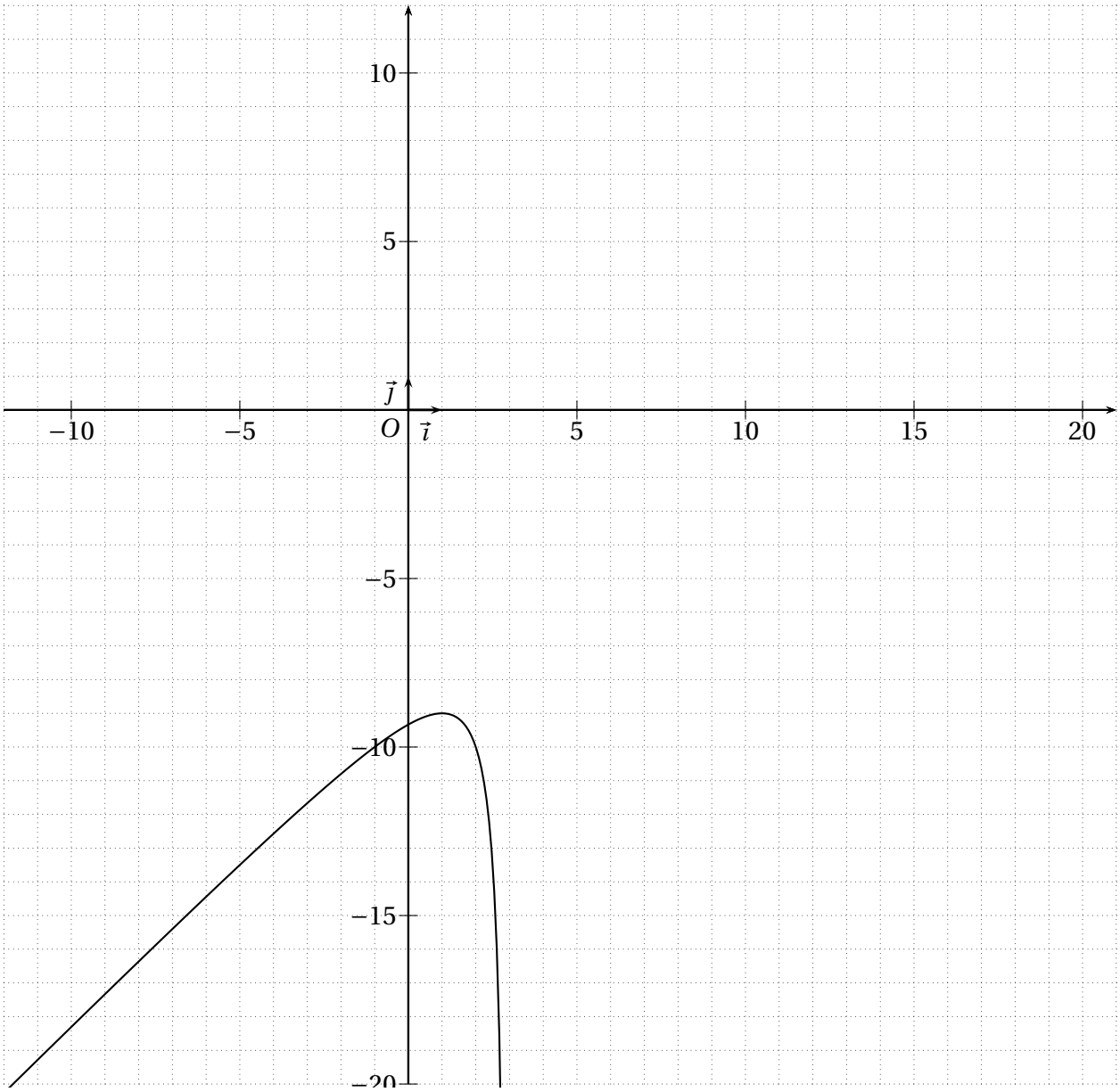



FIGURE A.11: Annexe de l'exercice A.18