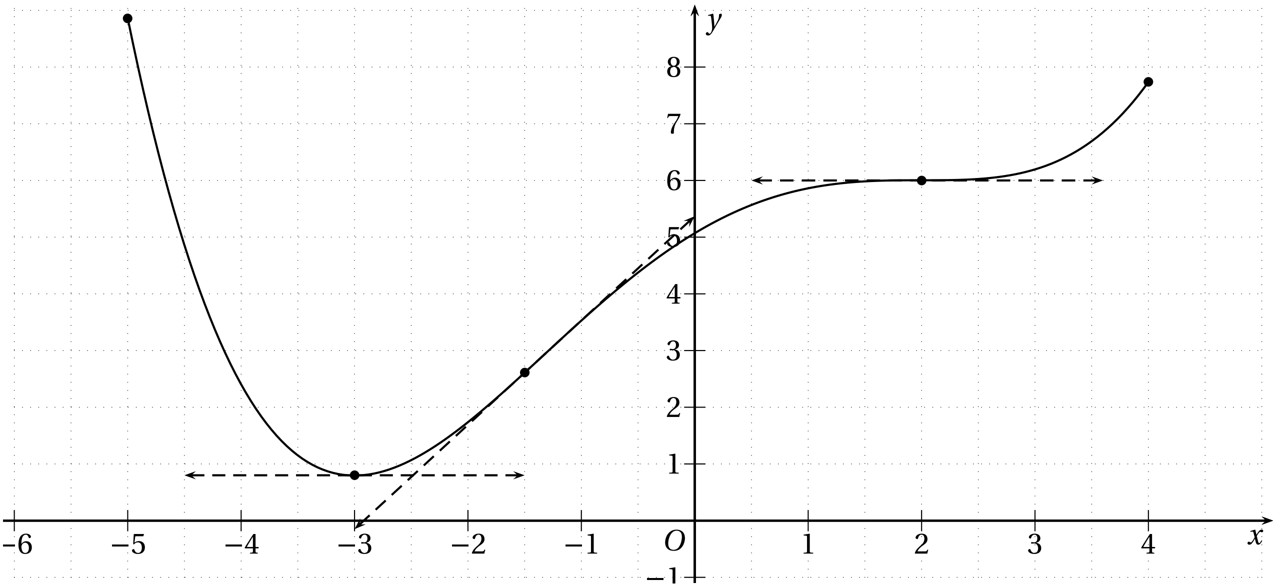
Devoir surveillé n° 2

Continuité – Convexité

EXERCICE 2.1 (5 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Il y a une seule réponse correcte parmi les trois propositions.
Cocher la réponse correcte pour chaque question, sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point, l'absence de réponse, les réponses multiples ou une réponse fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;4]$ ainsi que ses tangentes en certains points.



1. f est convexe sur l'intervalle :
   ☐ $[-3;2]$ ☐ $[-3;-1,5]$ ☐ $[-1,5;2]$

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet :
   ☐ un point d'inflexion ☐ deux points d'inflexion ☐ trois points d'inflexion

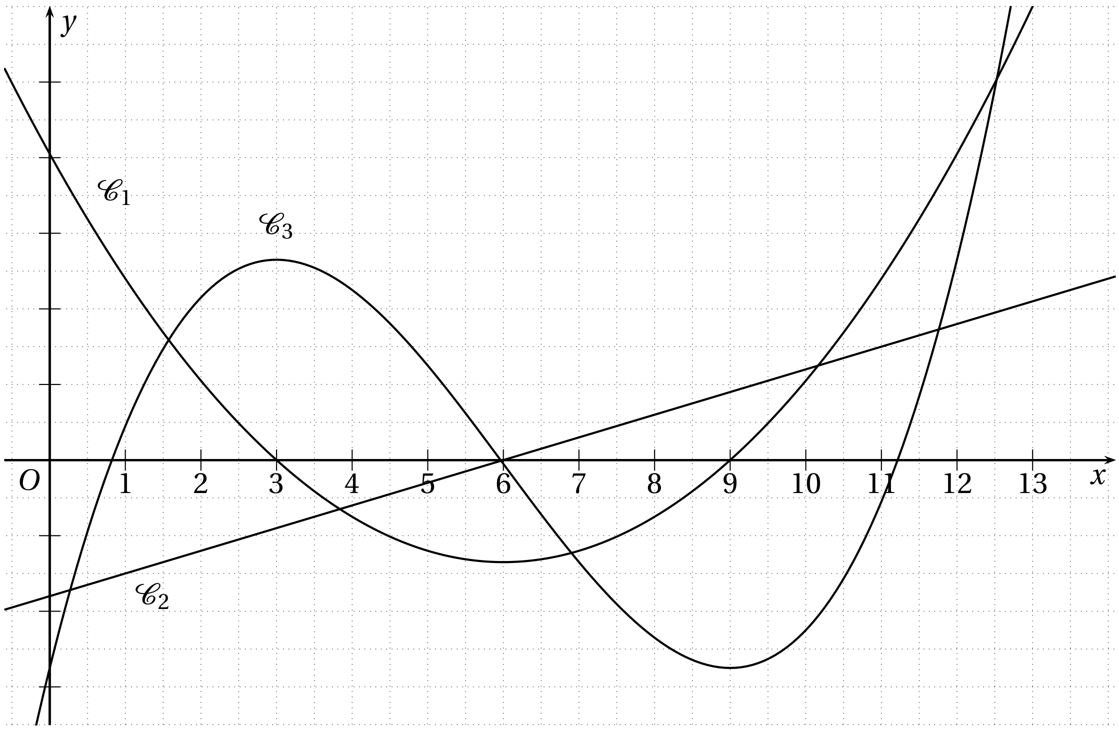
3. Sur l'intervalle $[-5;-1,5]$, la fonction f' :
   ☐ est croissante ☐ est décroissante ☐ change de variation

4. Pour tout $x \in [-3;2]$:
   ☐ $f'(x) \geqslant 0$ ☐ $f'(x) \leqslant 0$ ☐ $f'(x)$ change de signe

5. $f'' \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle :
   ☐ $[-5;-1,5]$ ☐ $[-3;2]$ ☐ $[-1,5;2]$

EXERCICE 2.2 (3 points)**.**
Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.
Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes de f, fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.

Associer chaque courbe à sa fonction en justifiant à l'aide d'arguments graphiques.



EXERCICE 2.3 (12 points)**.**
f est la fonction définie sur $[0;10]$ par $f(x) = x^3 - 18x^2 + 81x - 55$.

Partie A : Étude mathématique

1. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.
2. (a) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;3]$.

   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   On admettra pour la suite que $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[3;10]$, une autre solution β telle que $\beta \in [5,96;5,97]$.
3. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
4. Déterminer la convexité de f et déterminer si la courbe de f admet des points d'inflexion.
   On donnera leurs abscisses, le cas échéant.

Partie B : Contexte économique

Une entreprise produit entre 0 et 1000 kg (c'est-à-dire 1 tonne) de la précieuse poudre de perlinpinpin et réalise un bénéfice donné, **en milliers d'euros**, par la fonction $f(x) = x^3 - 18x^2 + 81x - 55$ où x est la quantité produite, exprimée **en centaines en kilogrammes**.

1. Déterminer la quantité, au kilogramme près, à produire pour que l'entreprise soit rentable.
2. Déterminer la quantité, au kilogramme près, à produire pour que le bénéfice soit maximal et donner ce bénéfice maximal arrondi à l'euro.
3. Déterminer la quantité, au kilogramme près, où la croissance du bénéfice est minimale.