
Devoir maison n°2

Suites

À rendre pour le vendredi 19 décembre.

Soit f une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ où m est un réel différent de 0 et 1 et p un réel quelconque.

Soit (u_n) la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple. Si $m = 2$ et $p = -3$, la fonction affine f est $f(x) = 2x - 3$, la suite (u_n) est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = 2u_n - 3$.

Partie A : Étude théorique

1. Déterminer, en fonction de m et de p , le nombre q tel que $f(q) = q$.
Indication : On isolera q à partir de l'équation $mq + p = q$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - q$ est géométrique.
Indication : On n'oubliera pas que $mq + p = q$.

Définition. La suite (v_n) ainsi définie sera appelée *suite auxiliaire* de la suite (u_n) .

3. En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de u_0 , m , p et n .

Partie B : Application

Medhi a le projet de partir 1 an en voyage en vélo. Pour cela, il souhaite acquérir un vélo et l'équiper pour créer ce que les spécialistes appellent une *randonneuse*.



Il estime le coût final de son véhicule à 2 000 €. Le 1^{er} janvier 2016, il compte déposer toutes ses économies, à savoir 500 €, sur un livret d'épargne populaire, à intérêts composés, rémunéré à 1,25 % par an.

Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1^{er} janvier des années suivantes 100 € sur ce livret. Il se demande quand il pourra partir.

Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1^{er} janvier de l'année 2016 + n .

Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,0125u_n + 100$.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. (a) Déterminer la suite (v_n) auxiliaire de (u_n) .
(b) Montrer que (v_n) est géométrique.
(c) En déduire l'expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n .
4. (a) Étudier la monotonie de (u_n) .
(b) Déterminer à quelle date il pourra partir.