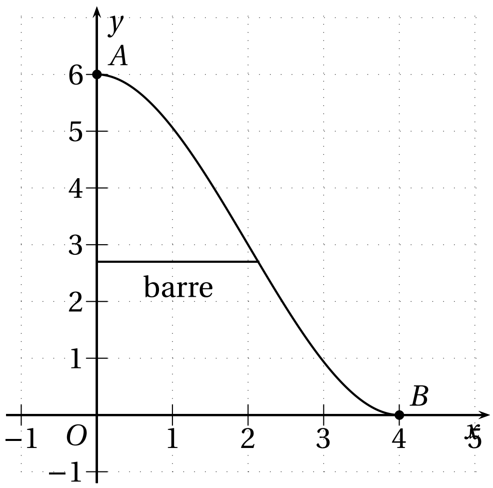
Devoir maison n°1 : un corrigé

Une mairie commande une glissière pour un (grand) toboggan à une entreprise dont l'allure est schématisée sur la figure ci-dessous (les dimensions sont en mètre).
Les contraintes sont les suivantes :

- Pour des raisons de sécurité la pente de la glissière au sommet (A) et au sol (B) doit être horizontale.
- Pour des raisons techniques, l'entreprise ne peut fabriquer que des glissières dont la courbe est d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



1. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

   $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donc :
   $f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c = 3ax^2 + 2bx + c$

   (b) Montrer que la première contrainte revient à $f'(x) = kx(x-4)$ où k est un réel qu'on déterminera.

   Au point A, d'abscisse 0, et au point B, d'abscisse 4, la pente doit être horizontale, ce qui signifie que la tangente à la courbe en ces points est parallèle à l'axe des abscisses donc la dérivée s'annule en 0 et en 4.
   Par ailleurs la dérivée est une fonction trinôme. Comme elle s'annule en 0 et en 4, elle a deux racines et une forme factorisée du type $k(x - x_1)(x - x_2)$ où k est le coefficient de x^2 et x_1 et x_2 les deux racines.
   Ici $k = 3a$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$ d'où :
   $f'(x) = 3a(x-0)(x-4) = 3ax(x-4)$.

   (c) En déduire b en fonction de a et la valeur de c.

   On a à la fois $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f'(x) = 3ax(x-4) = 3ax^2 - 12ax$. Donc, par identification : $\begin{cases} 2b = -12a \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 0 \end{cases}$
   Donc $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + d$ et $f'(x) = 3ax^2 - 12ax$.

2. Sachant que la glissière passe par $A(0;6)$ et $B(4;0)$, en déduire l'équation de la courbe.

   Comme la courbe passe par $A(0;6)$, $f(0) = 6$. Mais $f(0) = a \times 0^3 - 6a \times 0^2 + d = d$. Donc $d = 6$.
   $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 6$.
   Comme la courbe passe par $B(4;0)$, $f(4) = 0$. Mais $f(4) = a \times 4^3 - 6a \times 4^2 + 6 = -32a + 6$. Donc $-32a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.
   Ainsi l'équation de la courbe est $y = f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$.

3. (a) Étudier la convexité de f et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion.

$f'(x) = \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{4}x$
$f''(x) = \frac{9}{8}x - \frac{9}{4}$.
f'' est une fonction affine croissante ($\frac{9}{8} > 0$) donc elle est négative puis positive et elle s'annule en $\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. On a donc le « tableau de convexité » suivant :

x	0		2		4
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

Comme $f''(x)$ s'annule et change de signe en 2, ou bien comme f change de convexité en 2 tout en étant continue en 2, sa courbe admet un point d'inflexion : le point $I(2\,;\,f(2)) = (2\,;\,3)$.

(b) Pour consolider le toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale au point d'inflexion de la glissière.
Déterminer à quelle hauteur cette barre devra être placée et quelle sera sa longueur.

La hauteur correspond à l'ordonnée du point d'inflexion et la longueur de la barre à son abscisse, donc cette barre devra être placée à 3 m de hauteur et elle fera 2 m de long.