Chapitre 9

Intervalles de fluctuation et de confiance

Sommaire

9.1 Intervalle de fluctuation

9.1.1 Quelques rappels

Seconde

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 % a été défini en Seconde de la façon suivante :

Définition. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n.

Et la propriété suivante a alors été énoncée :

Propriété. *Dans le cas où $n \geqslant 25$ et $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$, l'intervalle I suivant contient l'intervalle de fluctuation, c'est-à-dire que la probabilité qu'il contienne la fréquence observée est* au moins *égale à 95 % :*

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Première

En Première, nous avons vu que la loi binomiale nous permettait de calculer très exactement les probabilités des différentes fréquences observables dans un échantillon de taille n, à savoir les valeurs $\frac{k}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, même pour $n < 25$ et $p \notin]0{,}2\,;\,0{,}8[$. La règle énoncée alors est la suivante :

Propriété 9.1. *L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, où a et b sont les deux entiers naturels définis par :*
- *a est le plus petit des entiers k vérifiant $p(X \leqslant k) > 0,025$;*
- *b est le plus petit des entiers k vérifiant $p(X \leqslant k) \geqslant 0,975$.*

Remarques.
- Lorsque $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, il est proche de l'intervalle vu en Seconde.
- Lorsque n est assez grand, il est quasiment centré sur p.
- Cet intervalle s'obtient grâce aux possibilités des calculatrices (ou des logiciels) par la lecture des probabilités cumulées croissantes.

9.1.2 Intervalle de fluctuation et loi normale

La détermination de l'intervalle de fluctuation associé à la loi binomiale est souvent fastidieuse, malgré l'apport des calculatrices ou des logiciels. On a vu dans le chapitre précédent que lorsque n est assez grand, la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et la loi normale $\mathcal{N}(np,\sqrt{np(1-p)}^2)$ sont proches. Or, dans le cas d'une variable aléatoire suivant une loi normale, la calculatrice nous indique que $p(\mu-1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu+1,96\sigma) \approx 0,95 \Leftrightarrow p\left(\frac{\mu-1,96\sigma}{n} \leqslant \frac{X}{n} \leqslant \frac{\mu+1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95$ ce qui signifie que la probabilité que la fréquence $\frac{X}{n}$ soit comprise dans l'intervalle $\left[\frac{\mu-1,96\sigma}{n};\frac{\mu+1,96\sigma}{n}\right]$ est proche de 0,95, ce qui correspond à un intervalle de fluctuation.

Mais $\frac{\mu-1,96\sigma}{n} = \frac{np-1,96\sqrt{np(1-p)}}{n} = \frac{np}{n} - 1,96\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ et $\frac{\mu+1,96\sigma}{n} = p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.
D'où la propriété suivante :

Propriété 9.2. *L'intervalle suivant, appelé* intervalle de fluctuation asymptotique *au seuil de 95 %, tend vers l'intervalle de fluctuation quand n devient grand :*

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

c'est-à-dire que la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n associe la fréquence, prend ses valeurs dans cet intervalle de fluctuation avec une probabilité qui s'approche de 0,95 quand n devient grand.
On convient que cet intervalle peut être considéré comme une bonne approximation de l'intervalle de fluctuation dès lors que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

9.1.3 Utilisation de l'intervalle de fluctuation

On utilise l'intervalle de fluctuation, comme en Seconde ou en Première, lorsque la proportion p dans la population est connue ou bien si on fait une hypothèse sur sa valeur :

Représentativité : si la proportion p d'un caractère dans une population est connue, il permet de décider si un échantillon de taille n issu de cette population est représentatif de la population : si la fréquence f du caractère dans l'échantillon appartient à cet intervalle, on considère, au seuil de 95 %, que l'échantillon est représentatif.

Hypothèse sur p : si on émet une hypothèse sur la proportion p d'un caractère dans une population, il permet de savoir si on doit rejetter cette hypothèse : si la fréquence f observée dans un échantillon de taille n appartient cet intervalle, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question ; sinon on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

9.2 Intervalle de confiance

On cherche à déterminer la proportion p d'un caractère dans une population, par exemple la proportion d'individus atteints d'une maladie bénigne. Il est souvent difficile pour des raisons à la fois financières et logistiques de pouvoir recueillir des données sur la population toute entière. Le plus souvent on se contente de travailler sur un échantillon de la population, dont on peut parfois vérifier au préalable s'il est représentatif de la population entière (sur d'autres critères, comme la fréquence d'hommes et de femmes par exemple). On sait que d'un échantillon à l'autre la fréquence d'apparition du caractère fluctue autour de la proportion p du caractère dans la population entière. Des simulations permettent d'obtenir qu'environ 95 % des intervalles de la forme $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contiennent la proportion p. Aussi à partir de la fréquence f d'apparition du caractère dans notre échantillon défini-t-on l'intervalle suivant :

Définition 9.1. L'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un *intervalle de confiance* de la proportion inconnue p au niveau de confiance 0,95.

Exemple. On souhaite estimer la proportion de personnes en surpoids, selon les critères de l'OMS, dans une ville quelconque. Pour cela 460 personnes ont été sélectionnées de manière aléatoire et un enquêteur est allé recueillir des informations auprès de ces personnes. La proportion de personnes en surpoids dans cet échantillon étudié est de 29,5 %.
L'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,295-\frac{1}{\sqrt{460}}\,;\,0,295+\frac{1}{\sqrt{460}}\right]\approx[0,25\,;\,0,34]$ est l'intervalle de confiance de la proportion de personnes en surpoids dans cette ville au niveau de confiance 0,95.

9.3 Exercices

EXERCICE 9.1.

Cet exercice nécessite de disposer d'une calculatrice TI ou d'une calculatrice CASIO récente.

On dispose d'une partie de programme :

TI	Casio
: PROMPT N	"N" ? $\to$ N $\hookleftarrow$
: PROMPT P	"P" ? $\to$ N $\hookleftarrow$
: 0 $\to$ I	0 $\to$ I $\hookleftarrow$
: While binomFRép(N,P,I) $\leqslant$ 0,025	While BinomCD(I,N,P) $\leqslant$ 0,025 $\hookleftarrow$
: I+1 $\to$ I	I+1 $\to$ I $\hookleftarrow$
: End	WhileEnd $\hookleftarrow$
: I $\to$ A	I $\to$ A $\hookleftarrow$

Remarque. binomFRép(n,p,k) ou BinomCD(I,N,P) calculent $p(X \leqslant k)$, où X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

1. (a) À quoi correspondent N et P demandés en début de programme ?
   (b) À quoi correspond A à la fin du programme ?
2. Comment modifier ce programme pour qu'il obtienne A **et** B à la fin du programme ?
3. Comment modifier ce programme pour qu'il calcule les deux bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale de paramètres n et p ?
4. On a exécuté ce programme avec $p = 0,4$ et on a obtenu les résultats suivants pour la borne inférieure :

n	20	50	200	1 000	5 000
Borne	0,2	0,26	0,335	0,37	0,3864

   Comparer ce résultat avec la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation introduit en Seconde. Qu'observe-t-on ?

EXERCICE 9.2.

Le responsable de la maintenance des machines à sous d'un casino doit vérifier qu'un certain type de machine est bien réglé sur une fréquence de succès de 0,06. Il dispose du programme élaboré dans l'exercice 9.1.

1. Lors du contrôle d'une machine, le technicien constate qu'elle a fourni 8 succès sur 65 jeux. Doit-il remettre en question le réglage de la machine ?
2. Lors du contrôle d'une autre machine, il constate qu'elle a fourni 12 succès sur 100 jeux. Doit-il remettre en question le réglage de la machine ?

EXERCICE 9.3.

En 2005, il y avait en France, selon l'INSEE, 62 731 milliers d'habitants dont 30 366 milliers d'hommes et 32 365 milliers de femmes. Cette même année en Premières générales à Dupuy de Lôme il y avait 350 élèves dont 218 femmes et 132 hommes. L'échantillon étant très petit par rapport à la population générale, on peut considérer qu'il s'agit d'un tirage aléatoire avec remise et que la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 350 associe le nombre de femmes dans cet échantillon suit une loi binomiale de paramètres $n = 350$ et $p = \frac{32365}{62731} \approx 0,52$.

Les élèves de Dupuy étaient-ils représentatifs de la population française ?

EXERCICE 9.4.
On fait l'hypothèse que tous les ans à Dupuy de Lôme il y a, en Seconde, deux élèves sur trois qui sont des femmes soit une proportion $p = \frac{2}{3}$. En Seconde 13, sur 36 élèves il y a 16 femmes. On supposera que la constitution d'une classe de 36 élèves peut être assimilée à un tirage aléatoire avec remise et que la variable aléatoire qui à chaque classe de 36 élèves associe le nombre de femmes dans cette classe suit une loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Déterminer si on doit rejetter l'hypothèse de départ, au seuil de 95 %.
2. Après vérification auprès de l'administration, il s'avère que cette hypothèse est juste. Que peut-on dire alors de la Seconde 13 ?

EXERCICE 9.5.
Les enfants sont dits prématurés lorsque la durée gestationnelle est inférieure ou égale à 259 jours. La proportion de ces naissances est de 6 %. Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré que les autres. Il est décidé de réaliser une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 400 naissances correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible. Les chercheurs décident a priori que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 alors leur hypothèse sera acceptée. Finalement le nombre d'enfants prématurés est de 50. Quelle est donc la conclusion ?

EXERCICE 9.6.
On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %.
Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.
Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.
La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?
3. Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d'asthme que dans le reste du dépertement.
   Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu'une proportion observée de 19 % soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

EXERCICE 9.7.
Le 18 avril 2002, l'institut IPSOS effectue un sondage dans la population en âge de voter. On constitue un échantillon de 1 000 personnes (inscrites sur les listes électorales) que l'on suppose choisies ici de manière aléatoire. Les résultats partiels en sont les suivants : sur les 1 000 personnes

- 135 ont déclaré vouloir voter pour Jean-Marie Le Pen
- 195 ont déclaré vouloir voter pour Jacques Chirac
- 170 ont déclaré vouloir voter pour Lionel Jospin

1. Déterminer les trois intervalles de confiance au niveau de confiance de 95 % correspondant aux proportions d'intention de votes pour chacun des trois candidats.

2. Si on ne donne que le résultat brut du sondage et non l'intervalle de confiance, quel est le degré d'imprécision du résultat ?
3. À l'issue du premier tour Jean-Marie Le Pen, Jacques Chirac et Lionel Jospin ont obtenu, respectivement, 16,9 %, 19,9 % et 16,2 % des suffrages exprimés. Commenter.
4. L'institut CSA donnait en avril 14 % d'intention de votes pour Jean-Marie Le Pen pour un échantillon de taille identique. Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % associé à ce nouveau sondage. Commenter.

EXERCICE 9.8.
Les sondages d'intention de vote s'effectuent en général sur des échantillons de taille $n = 1000$.

1. Déterminer l'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % des votants pour l'un des candidats quand le sondage indique des intentions de votes proches de 50 % (cas du second tour de l'élection présidentielle).
2. Déterminer l'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % des votants pour l'un des candidats quand le sondage indique des intentions de votes proches de 10 % (cas des « petits » candidats du premier tour de l'élection présidentielle).

EXERCICE 9.9.
Un test de diagnostic rapide effectué sur des sujets ictériques (coloration jaune de la peau, des muqueuses et du blanc de l'œil) doit permettre d'estimer si l'ictère est d'origine virale ou non, sans avoir besoin de faire des analyses longues et compliquées. Cependant il est important de pouvoir s'assurer que ce test est de bonne qualité, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir indiquer correctement si l'ictère est viral ou non. Il doit être capable d'identifier correctement le type d'ictère : il est positif chez les sujets dont l'ictère est viral et négatif sinon.
Une étude est effectuée sur 100 personnes ayant un ictère viral et 100 personnes ayant un ictère d'origine non virale.
Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 9.1 de la présente page.

TABLE 9.1: Tableau de l'exercice 9.9

	Hépatite virale	Ictère d'origine non virale
Test positif	85	20
Test négatif	15	80

1. Déterminer la proportion de sujets ayant un test positif parmi ceux ayant un ictère viral.
2. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion de tests positifs lorsque l'ictère est viral.
   Cette proportion est appelée sensibilité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne ayant un ictère viral réagisse au test. Un test diagnostic sera d'autant meilleur que la sensibilité est importante.
3. Déterminer la proportion de sujets ayant un test négatif parmi celles ayant un ictère non viral.
4. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion de tests négatifs lorsque l'ictère est non viral.
   Cette proportion est appelée spécificité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne ayant un ictère non viral ne réagisse pas au test. Un test diagnostic sera d'autant meilleur que la spécificté est importante.

EXERCICE 9.10.
Dans le but d'évaluer la prise en charge de la bronchiolite dans un hôpital de la région Aquitaine, une étude rétrospective a été mise en place.

1. Il est recommandé de coucher l'enfant de manière très inclinée (couchage en proclive) dans le cadre de la prise en charge de la bronchiolite. On évalue cette pratique à partir d'un échantillon de 134 dossiers. 106 enfants ont été couchés en proclive.
   Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion d'enfants dont le couchage respecte la recommandation.
2. Une étude plus fine permet de comparer les pratiques entre les différents services ayant admis des enfants dont les résultats sont dans le tableau 9.2 de la présente page.

TABLE 9.2: Tableau de l'exercice 9.10

Couchage proclive	En service des urgences	En service hospitalier	Total
Oui	45	52	97
Non	29	8	37
Total	74	60	134

   (a) Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de couchage en proclive pour chaque type de service.
   (b) Peut-on conclure selon vous au seuil de 95 % que la pratique de couchage n'est pas identique selon le service ?

EXERCICE 9.11.
Un maraîcher achète un lot de semances de tomates pour produire ses plants de tomate. Il lui reste des semences de l'année passée, dont il doit contrôler le taux de germination pour pouvoir les utiliser avec les autres. En effet, des taux de germination trop différents provoquent des trous dans les plates bandes de production, ce qui génère un coût de manutention plus élevé (il faut enlever les pots non germés avant de les conditionner). Il faut donc comparer les taux de germination des semences des deux années.
Une stratégie consiste à calculer et à comparer les intervalles de confiance des taux de germination des plants de l'année et de l'année précédente. Si les deux intervalles ne se recoupent pas, on peut conclure à une différence de taux de germination entre les deux semances d'origines. Il faudra alors les semer séparément.
Pour faire cette comparaison, le maraîcher prélève, aléatoirement dans les semences de l'année, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 185 graines germent.
Il prélève ensuite, aléatoirement dans les semences de l'année précédente, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 150 graines germent.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, du taux de germination p_a du lot de semences de l'année.
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95 % du taux de germination p_b du lot de semences de l'année précédente.
3. Conclure.