Chapitre 7

Calcul intégral

Sommaire

7.1 Activités

ACTIVITÉ 7.1 (Somme de coûts marginaux)**.**
Partie 1 : Production à l'unité
Une petite usine fabrique des casseroles toutes identiques.
À chaque casserole supplémentaire fabriquée, le service de gestion calcule le coût de sa fabrication.
Ce coût est appelé coût marginal et est donné dans la deuxième colonne du tableau 7.1 page suivante.
Les coûts fixes se montent à 80 €.
Au fur et à mesure de la fabrication, on somme les coûts marginaux des casseroles déjà fabriquées ; en ajoutant les coûts fixes on obtient alors le coût total.

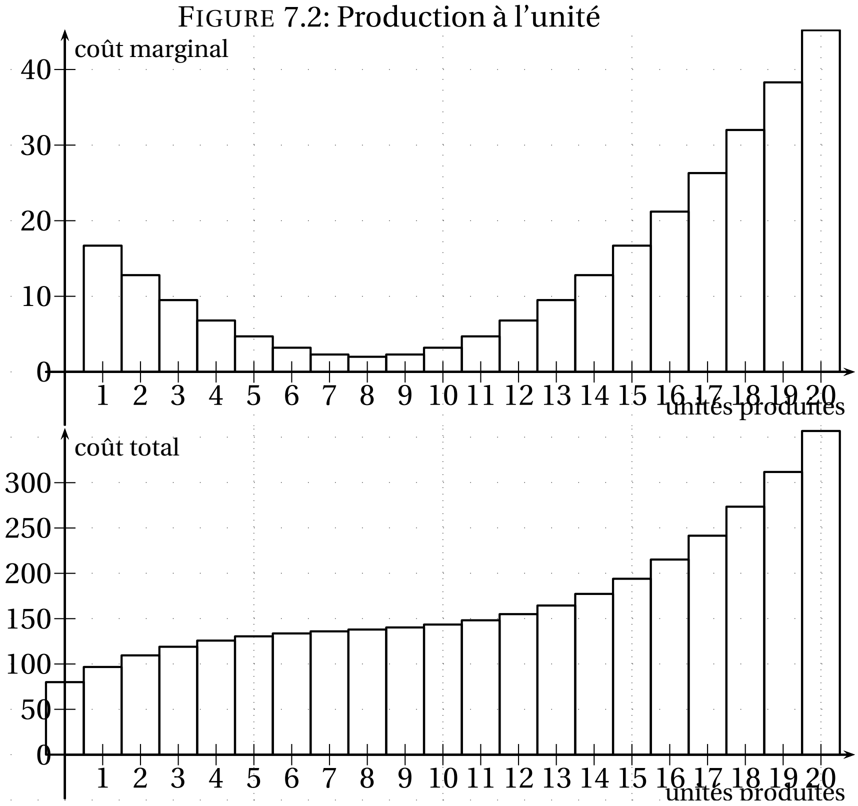
1. Compléter la dernière colonne.
2. Comment pourrait-on compléter les deux dernières colonnes à partir du graphique de la figure 7.2 page suivante ?

3. Quelle casserole a le plus petit coût marginal ? Quel est alors le coût total de fabrication pour ce niveau de production ?

FIGURE 7.1: Coûts de l'activité 7.1

unité	coût marginal	coût total
0		
1	16,7	
2	12,8	
3	9,5	
4	6,8	
5	4,7	
6	3,2	
7	2,3	
8	2	
9	2,3	
10	3,2	
11	4,7	
12	6,8	
13	9,5	
14	12,8	
15	16,7	
16	21,2	
17	26,3	
18	32	
19	38,3	
20	45,2	

FIGURE 7.2: Production à l'unité



Partie 2 : Production continue

Dans une autre usine, on produit une pâte à bois.

Le coût marginal, en euros par kg produit, est donné par : $C_m(x) = 0,3x^2 - 4,8x + 21,2$ pour $x \in [0;20]$.

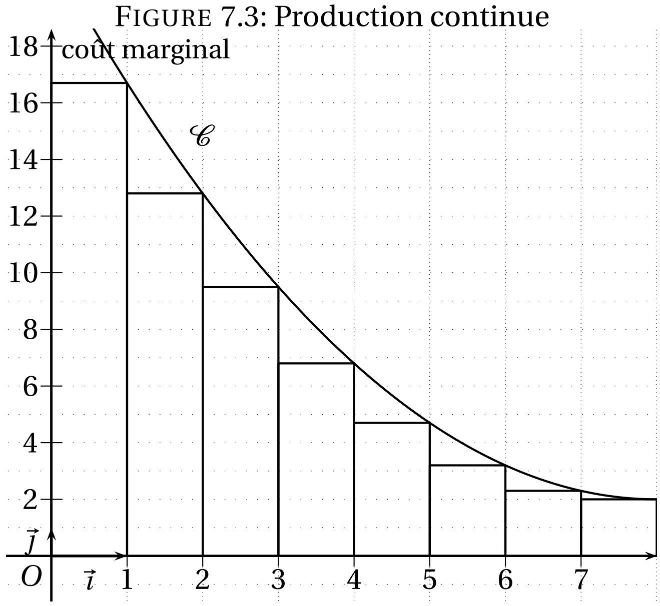
C'est une fonction continue car on peut produire quelques grammes.

1. Calculer le coût marginal du quinzième kg produit, du vingtième et du huitième. Comparer au cas précédent.
2. La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la figure 7.3 page ci-contre représente le coût marginal pour x kg produits.
   (a) Comment interprèter la somme des aires des rectangles dessinés sur ce graphique ?
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 1 en 1 : $\sum_{x=1}^{x=8} 1 \times C_m(x) = 1 \times C_m(1) + 1 \times C_m(2) + \cdots + 1 \times C_m(7) + 1 \times C_m(8)$.
3. On étudie les coûts marginaux des huit premiers kg en calculant ces coûts pour chaque 500 g ou 0,5 kg.
   (a) À l'aide de la calculatrice, calculer les coûts marginaux de 0,5 kg à 8 kg de tous les 500 g, en euros par 0,5 kg, et les placer dans une liste.
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 0,5 en 0,5 : $\sum_{x=0,5}^{x=8} 0,5 \times C_m(x) = 0,5 \times C_m(0,5) + 0,5 \times C_m(1) + \cdots + 0,5 \times C_m(8)$.
   Comment pourrait-on représenter cette somme sur le graphique 7.3 ?

4. Si vous disposez d'un tableur, procéder de même en calculant les coûts marginaux tous les 100 g, en euros par 0,1 kg.

   Expliquez pourquoi la somme, pour x variant de 0,1 en 0,1 : $\sum_{x=0,1}^{x=8} 0,1 \times C_m(x)$ est très proche de l'aire sous la courbe.

FIGURE 7.3: Production continue



ACTIVITÉ 7.2 (Fonctions dont on connaît la dérivée)**.**

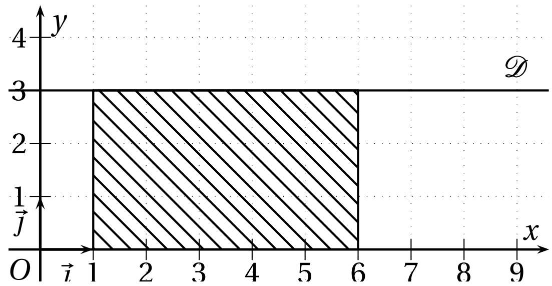
1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$.
   (a) Vérifier que g est la dérivée de f.
   (b) Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
   (c) Plus généralement, quelles sont les fonctions ayant g pour dérivée ?
2. À l'aide du tableau des dérivées, trouver **une** fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$;
   (f) $f(x) = 6(2x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$

Définition. Soit F une fonction de dérivée f. Alors F est appelée *primitive* de f.

ACTIVITÉ 7.3 (Aire et primitive)**.**

Fonction constante

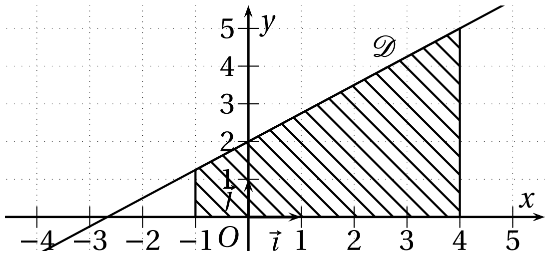
Le droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3$ dans le repère ci-contre.



1. Calculer l'aire du rectangle hâchuré, en carreaux.
2. Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(1)$.
3. Comparer les deux résultats.

Fonction affine

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 2$ représente la fonction $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.

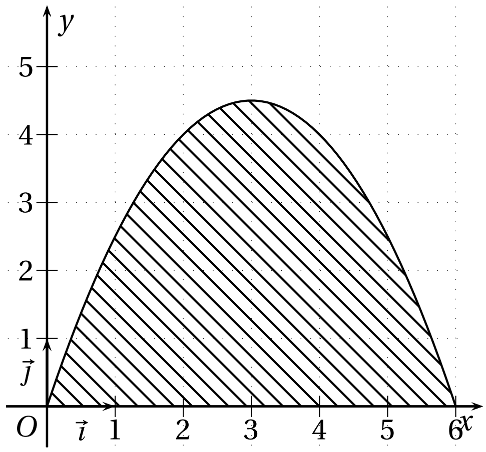


1. Calculer l'aire du trapèze[1] hachuré, en carreaux.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(4) - F(-1)$.
3. Comparer les deux résultats.

Fonction trinôme

ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que : « Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ». On l'admettra.

La parabole ci-contre est d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ pour $x \in [0\,;6]$ et représente la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.



1. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du secteur parabolique hachuré.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(0)$.
3. Comparer les deux résultats.

Fonction de la partie 2 de l'activité 7.1

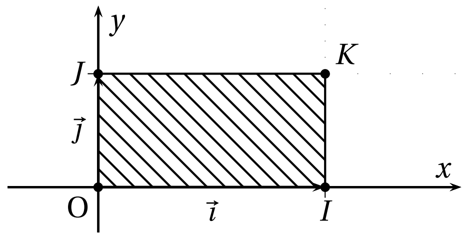
On rappelle que le coût marginal, en euros par kg produit, est donné par : $C_m(x) = 0{,}3x^2 - 4{,}8x + 21{,}2$ pour $x \in [0\,;20]$..

1. Trouver une fonction F, primitive de la fonction C_m.
2. En déduire le coût des huit premiers kilogrammes.
3. En déduire le coût moyen pour chaque kilogramme pour ces huit premiers kilogrammes. Comment pourrait-on le représenter sur la courbe représentative de C_m ?
4. Calculer :
   - le coût des quinzième au vingtième kilogrammes.
   - le coût moyen des quinzième au vingtième kilogrammes.
5. Calculer le coût total des vingt kilogrammes et le coût moyen de ces kilogrammes.

1. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\dfrac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la petite base, B la grande base et h la hauteur du trapèze

7.2 Aire sous la courbe d'une fonction positive

Définition 7.1. Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire($\mathrm{O}IKJ$) = 1 u.a.

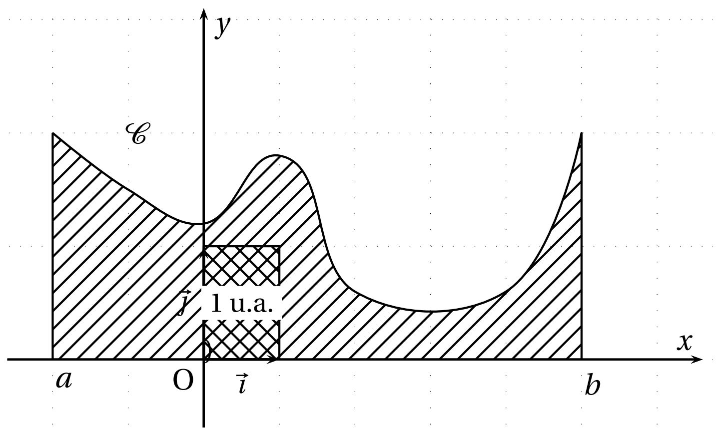


Remarques.

- $\mathrm{O}IKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

Définition 7.2 (Aire sous la courbe d'une fonction positive)**.** Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle I dont la représentation graphique est appelée $\mathscr{C}$.
Soient $a \leqslant b$ deux réels de I.
On appelle *aire sous la courbe de f de a à b* l'aire, **exprimée en u.a.**, du domaine $\mathscr{D}$ délimité par :
- les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (à gauche et à droite) ;
- $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses (en haut et en bas).

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



Remarques.

- On a vu, dans l'activité 7.1 page 107, que la somme des aires rectangles « situés sous la courbe » s'approchait d'autant plus de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ que la base du rectangle était petite. En extrapolant ce raisonnement, il faut comprendre la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ de la façon suivante : les rectangles sous la courbe sont de base dx, infiniment petite, de hauteur $f(x)$, le symbole $\displaystyle\int$ représente la somme infinie de ces rectangles, a et b sont les bornes de la somme.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit aussi « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- La variable peut être indifférement t, x, y... On dit que c'est une variable *muette*.

7.3 Primitive d'une fonction

7.3.1 Définition et conséquences

Définition 7.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de f* toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Théorème 7.1. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I*

On l'admettra.

Théorème 7.2. *Soit F une primitive de f sur un intervalle I.*
Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G = F + k$, où $k \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$.

Preuve.

- Supposons que F et G sont deux primitives de f sur I. Montrons qu'alors $G = F + k$.
  Par définition $F' = f$ et $G' = f$, donc $F' - G' = f - f = 0$, mais $F' - G' = (F - G)'$.
  Comme les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, $F - G$ est une fonction constante.
  Donc $F - G = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Donc $F = G + k$.
- Soit F une primitive de f sur I. Montrons que $G = F + k$ est aussi une primitive de f.
  $G' = (F + k)' = F' + 0 = f$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

♢

7.3.2 Primitive satisfaisant une condition initiale

Propriété 7.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve.

- *Existence.*
  f étant continue, elle admet des primitives. Soit H l'une d'elles.
  Supposons que $H(x_0) = z_0 \neq y_0$.
  D'après le théorème 7.2, la fonction $F = H - z_0 + y_0$ est aussi une primitive de f.
  Or $F(x_0) = H(x_0) - z_0 + y_0 = z_0 - z_0 + y_0 = y_0$. Il existe donc bien une primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.
- *Unicité.*
  Soient F et G deux primitives telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$.
  D'après le théorème 7.2, $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Donc $G(x_0) = F(x_0) + k \Leftrightarrow y_0 = y_0 + k \Leftrightarrow k = 0$.
  Donc $G = F$.

♢

Exemple 7.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Déterminer **la** primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

- On remarque que $G(x) = x^3 + x^2 + x$ est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On cherche k tel que $F(1) = -1$. Or $F(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + k = k + 3$. Donc $-1 = k + 3 \Leftrightarrow k = -4$
  Donc $F(x) = x^3 + x^2 + x - 4$ est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

7.3.3 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau ci-dessous donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive ($k \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$	$\mathbb{R}$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
Plus généralement : $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$

Les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

7.3.4 Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau ci-dessous. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Conditions	La fonction s'écrivant sous la forme	admet comme primitive
	$u' + v'$	$u + v$
Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante	ku'	ku
	$u'\mathrm{e}^u$	e^u

7.4 Intégrale d'une fonction

7.4.1 Définition

Définition 7.4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I. Soit F une primitive de f. On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel, noté $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, égal à $F(b) - F(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

On admettra que dans le cas d'une fonction f positive avec $a \leqslant b$, donc lorsque l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe de f, cette aire est bien donnée par $F(b) - F(a)$.

Remarques.

- On note aussi : $F(b) - F(a) = \left[F(t)\right]_a^b$.
- Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. En effet, si on prend à la place une primitive $G = F + k$, on a $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.
- Dans les cas où f n'est pas toujours positive ou bien quand $a \geqslant b$, l'intégrale n'est pas l'aire sous la courbe mais est une quantité mathématique (qui n'est pas forcément positive).

7.4.2 Propriétés de l'intégrale

Les preuves des propriétés seront faites en classe.

Propriété 7.4. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors*

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

Interprétation graphique : dans le cas d'une fonction positive, $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t$ peut être vue comme l'aire d'un rectangle de hauteur $f(t)$ et de base $a - a = 0$, donc son aire est égale à zéro.

Propriété 7.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors*

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Propriété 7.6 (Linéarité)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :*

- $\int_a^b \left(\alpha f(t)\right) dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b \left(f(t) + g(t)\right) dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- *Plus généralement :*
  $\int_a^b \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Interprétation graphique : dans le cas de fonctions positives, avec $a \leqslant b$ et α et β positifs, on peut interpréter ces propriétés de la façon suivante :

- l'aire sous la courbe de αf est égale à α fois l'aire sous la courbe de f ;
- l'aire sous la courbe de $f + g$ est égale à la somme de l'aire sous la courbe de f et de l'aire sous la courbe de g.

Propriété 7.7 (Inégalités)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur I et $a \leqslant b$ deux réels de I.*

- *Si $f \geqslant 0$ sur I alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.*
- *Si $f \leqslant g$ sur I alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.*

Interprétation graphique : dans le cas de fonctions positives, comme $a \leqslant b$, on peut interpréter ces propriétés de la façon suivante : si $f \leqslant g$ alors l'aire sous la courbe de f est inférieure à l'aire sous la courbe de g, le premier point étant un cas particulier de ce cas général (l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à zéro est égale à zéro).

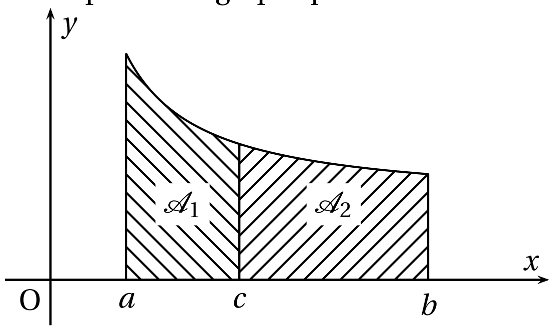
Remarque. Les réciproques sont fausses.

Propriété 7.8 (Relation de CHASLES)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Interprétation graphique : Dans le cas où $a \leqslant c \leqslant b$ et où $f \geqslant 0$, on peut interpréter la relation de CHASLES en termes d'aires : sur la figure 7.4 de la présente page, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

FIGURE 7.4: Interprétation graphique de la relation de CHASLES



7.4.3 Intégrale et primitive

Théorème 7.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;b]$. Alors la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.*

On admettra que F est dérivable et la preuve que sa dérivée est f sera faite en cours.

Remarque. Par définition, F est la primitive de f qui s'annule en a.

7.4.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 7.5. La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre :

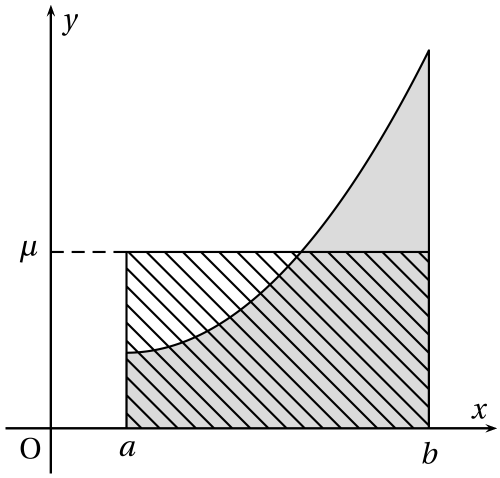
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarques.

- On note parfois $\overline{f}$ la valeur moyenne de f.

- La valeur moyenne de f est dans la même unité que celle de f.

Remarque. Dans le cas où $f \geqslant 0$, on peut interpréter la valeur moyenne en termes d'aires (ici $a < b$).
On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu \mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.
Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.
On a donc $(b-a)\mu = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hâchurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.



7.5 Exercices

7.5.1 Primitives

EXERCICE 7.1.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer F, une primitive de f.

1. $f(x) = 5$;
2. $f(x) = x$;
3. $f(x) = 3x$;
4. $f(x) = 3x^2$;
5. $f(x) = -4x+3$;
6. $f(x) = x^2$;
7. $f(x) = 7x-1$;
8. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$;
9. $f(x) = 4x^3+x$;
10. $f(x) = \frac{x-5}{3}$;
11. $f(x) = -5x^2$;
12. $f(x) = x^4$;
13. $f(x) = 2x^5+3x$;
14. $f(x) = \frac{3x^4+x}{2}$;
15. $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

EXERCICE 7.2.
1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'ensemble des primitives F de f sur l'intervalle I.
   (a) $f(x) = 3x^2+2x+2$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = -x^2+1$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$;
   (d) $f(x) = 5x + \frac{2}{x^2}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.
2. Soit f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$.
   Déterminer les primitives F de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Existe-t-il une primitive de f prenant la valeur 2 lorsque $x = 1$?

EXERCICE 7.3.
Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner toutes les primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^9$;
2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$;
3. $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$;
4. $f(x) = 2x^3 + \frac{3}{x^2}$;
5. $f(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{x}$;
6. $f(x) = 2x - 7 - \frac{5}{x^3}$.

EXERCICE 7.4.
Pour chacune des fonctions f suivantes, donner une primitive F vérifiant la condition imposée.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+3x-1$; $F(2) = 3$;
2. f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 + \frac{3}{x^2}$; $F(3) = -1$.

EXERCICE 7.5.
On considère la fonction F définie par $F(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée F' de la fonction F et dresser le tableau de variation de la fonction F.
2. Résoudre l'équation $F(x) = 1$.
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{5}{(2x+1)^2}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$.
   Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(2) = 0$.

7.5.2 Calcul intégral

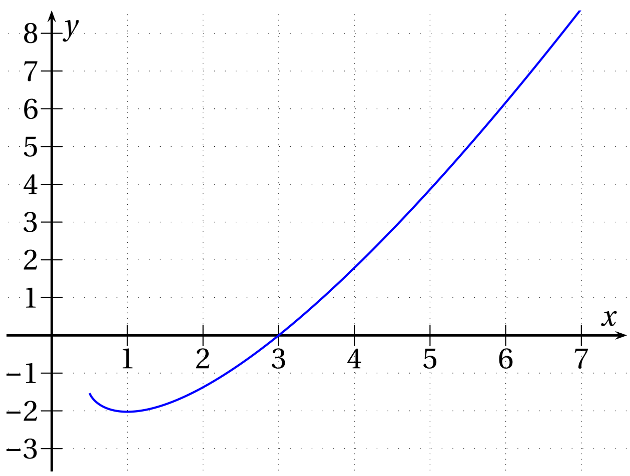
EXERCICE 7.6.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^3 (x+4)\mathrm{d}x\,;$
2. $\displaystyle\int_2^0 (x^2+x)\mathrm{d}x\,;$
3. $\displaystyle\int_0^{-2} 4t^3\mathrm{d}t\,;$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\,;$
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x\,;$
6. $\displaystyle\int_2^{-1} 3x^3\mathrm{d}x\,;$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}t\,;$
8. $\displaystyle\int_4^0 \left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x\,;$
9. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,;$
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\,;$
11. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^3}\mathrm{d}x.$

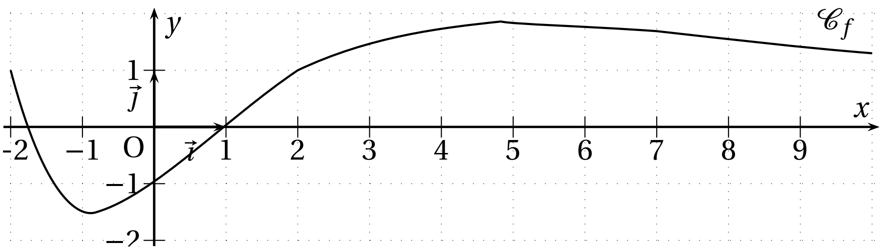
7.5.3 Lectures graphiques

EXERCICE 7.7 (D'après Amérique du Nord 2007)**.**
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $\mathrm{J} = \left]\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$.
On sait que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(3\,;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1\,; -2)$.
On note f la fonction dérivée de F.

1. À l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.
2. Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.



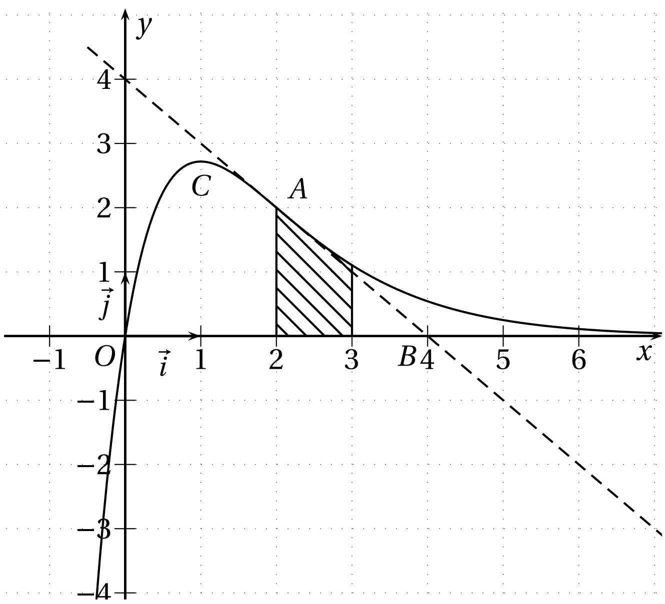
EXERCICE 7.8 (D'après Polynésie 2005)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\,; 10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.
On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point $A(5\,; 5,43)$ appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.



Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. (a) Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
   (b) Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.
   (c) Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle $[-2\,;10]$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$. La représenter en rouge sur le graphique.
   (b) Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.
   (c) Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1\,;5]$. La représenter en bleu sur le graphique.

EXERCICE 7.9.
On a représenté, sur la figure ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



La courbe Γ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ.
La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.
Le domaine hachuré $\mathscr{D}$ est délimité par les droites d'équation $x = 2$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe Γ.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Avec la précision permise par le graphique :
   (a) Déterminer les solutions des équations suivantes :

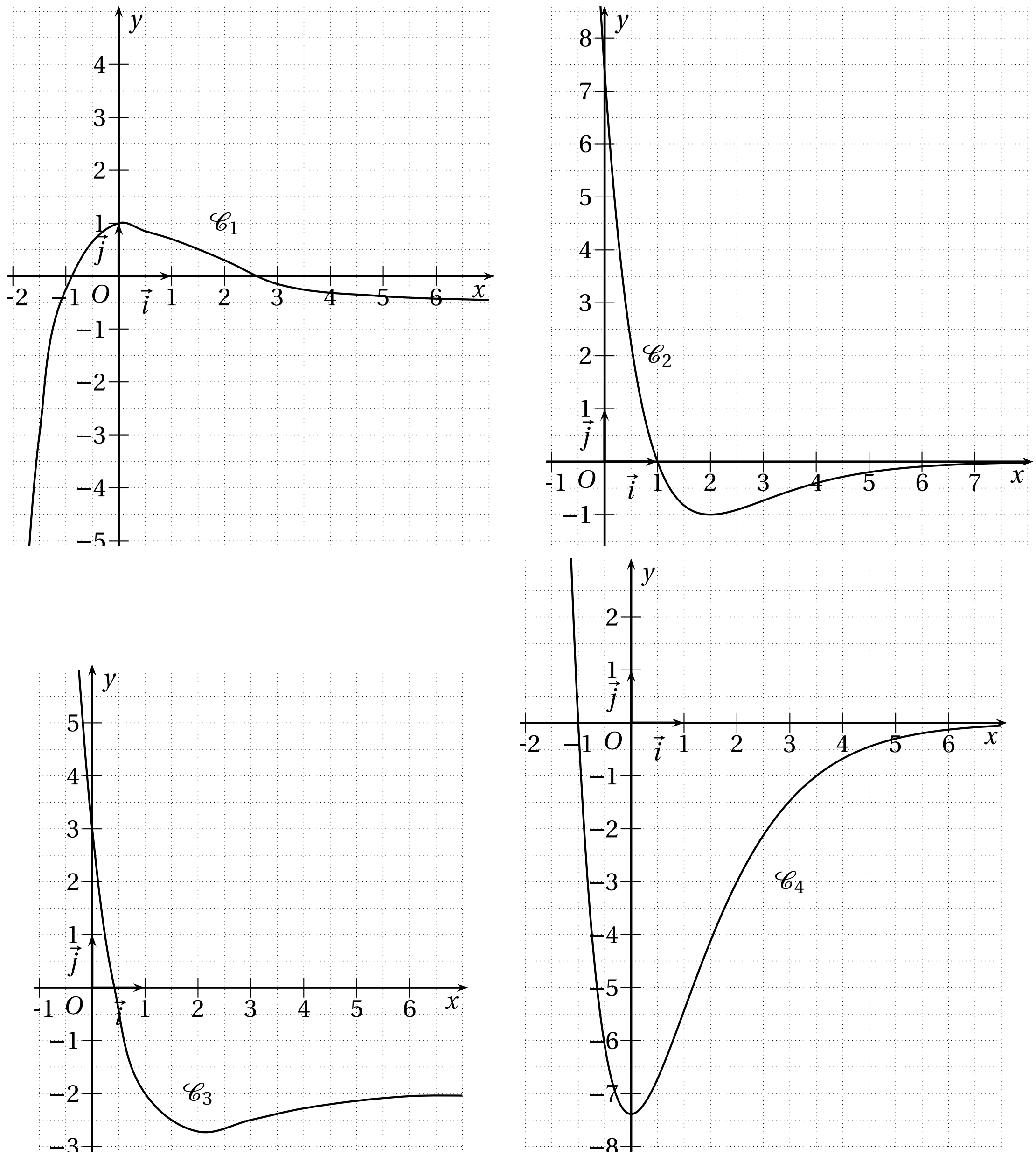
i. $g(x) = 2$; ii. $g(x) = -2$; iii. $g(x) = 4$.

(b) Plus généralement, déterminer, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \lambda$.

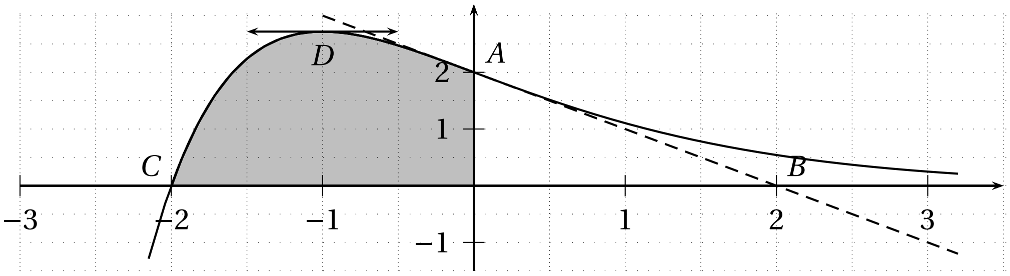
3. Une des représentations graphiques de la présente page, figure 7.5, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
4. (a) Une des représentations graphiques de la présente page, figure 7.5, représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.

   (b) En déduire l'aire du domaine hachuré $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

FIGURE 7.5: Courbes de l'exercice 7.9

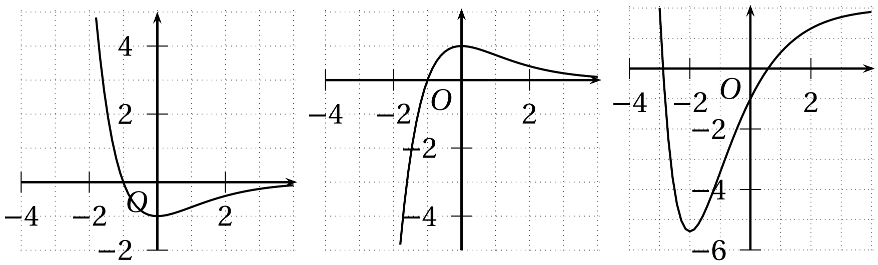


EXERCICE 7.10.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0.75 cm sur l'axe des ordonnées), d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ 2)$ et $C(-2;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine grisé $\mathscr{D}$ est délimité par les axes de coordonnées et par la courbe Γ.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \leqslant 2$;
   - $f(x) \geqslant 3$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
4. (a) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
   (b) Déterminer alors l'aire du domaine grisé $\mathscr{D}$ en cm^2.

Courbe 1 *Courbe 2* *Courbe 3*



7.5.4 Sujets dits de synthèse

EXERCICE 7.11 (D'après Asie Juin 2007)**.**
Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère que la fonction f définie sur $[1 ; 6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. (a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

EXERCICE 7.12 (D'après Liban 2007).
On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure 7.6 de la présente page dans le plan muni d'un repère (unités : 2 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée).
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A (1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$ où B est le point de coordonnées (2 ; e − 1). La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

Partie A

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=(ax+b)\ln(x)$ où a et b sont deux réels.

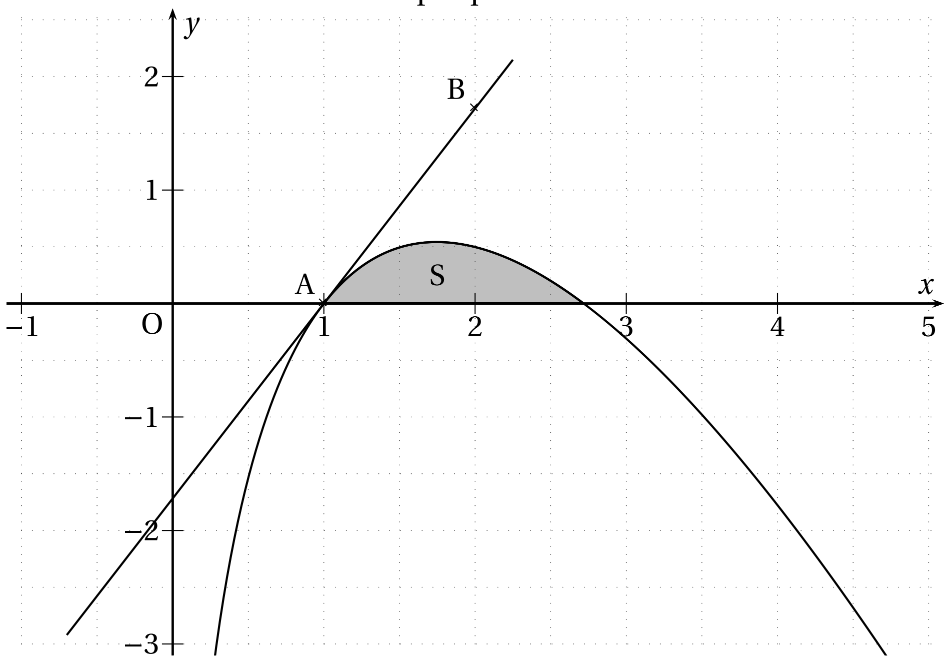
1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(\mathrm{e})$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} a\mathrm{e}+b &= 0\\ a+b &= \mathrm{e}-1\end{cases}$
   Déterminer a et b.

Partie B

On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(\mathrm{e}-x)\ln(x)$.
On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=-\frac{1}{2}x^2\ln(x)+\mathrm{e}x\ln(x)+\frac{1}{4}x^2-\mathrm{e}x$
   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner la valeur approchée à 10^{-1} de S en cm^2.

FIGURE 7.6: Graphique de l'exercice 7.12



EXERCICE 7.13.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=5\frac{\ln(x)}{x}+3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.
2. On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\frac{5}{2}(\ln(x))^2+3x$

(a) Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

(b) En déduire la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln(2))^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.

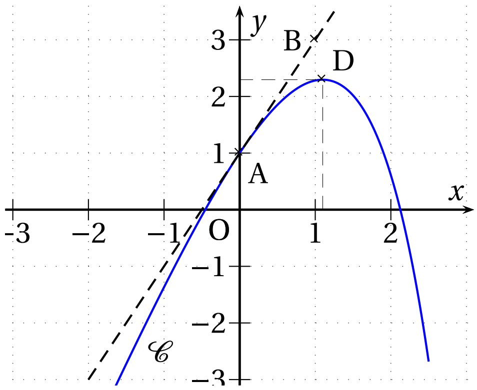
3. (a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2\,;4]$.

   (b) Donner une interprétation graphique de I.

4. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

Exercice 7.14 (Antilles – Septembre 2009)**.**
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par : $f(x) = a\mathrm{e}^x + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés.
Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est représentée sur la figure ci-contre.
On dispose des renseignements suivants :

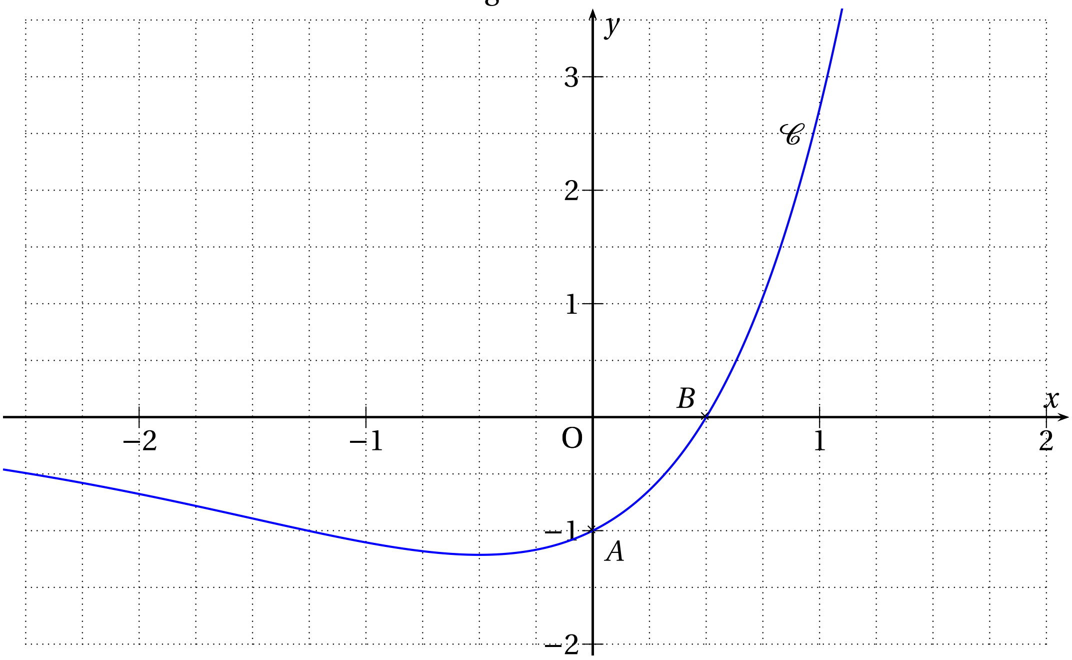
- $\mathscr{C}$ passe par A$(0\,;1)$.
- B est le point de coordonnées $(1\,;\ 3)$; la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point D d'abscisse $\ln(3)$.



1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f. Traduire les renseignements précédents par trois égalités utilisant f ou f'.
2. En résolvant un système, déterminer a, b et c.
3. On admet à partir de maintenant que $f(x) = -\mathrm{e}^x + 3x + 2$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   (b) Montrer que f s'annule exactement une fois sur $[-2\ ;\ \ln(3)]$ en un réel α. Donner, en justifiant, une valeur approchée au centième près de α.
   (c) Pour la suite, on admet que f s'annule exactement une fois sur $[\ln(3)\ ;\ 3]$ en un réel β.
   Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
4. (a) Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   (b) On considère la surface $\mathscr{S}$ délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = \ln(3)$.
   Hachurer $\mathscr{S}$ sur la figure en annexe.
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire. On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au centième.

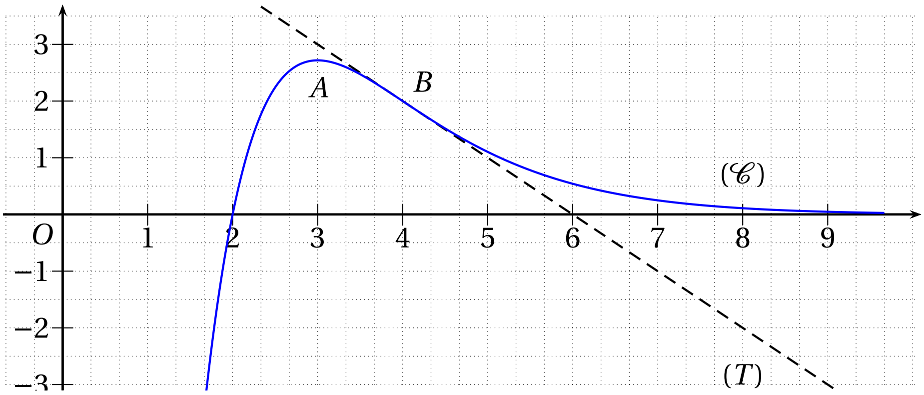
EXERCICE 7.15.
On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure 7.7 de la présente page (unités : 3 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée).

FIGURE 7.7: Figure de l'exercice 7.15



1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Montrer que f', la dérivée de f, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x puis en déduire le tableau des variations de f (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et la tracer sur le graphique.
3. (a) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f.
   (b) Colorier le domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.
   (c) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis en déduire la valeur de l'aire du domaine colorié en cm^2 arrondie au centième.

EXERCICE 7.16 (D'après Métropole – La Réunion – Septembre 2007)**.**
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée sur la figure ci-dessousest la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. Les points $A(3\,;\,\mathrm{e})$ et $B(4\,;\,2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.



Partie I : Lectures graphiques

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3\,;\,10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

Partie II : Étude de la fonction

La fonction f représentée sur la figure 4.3, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

1. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

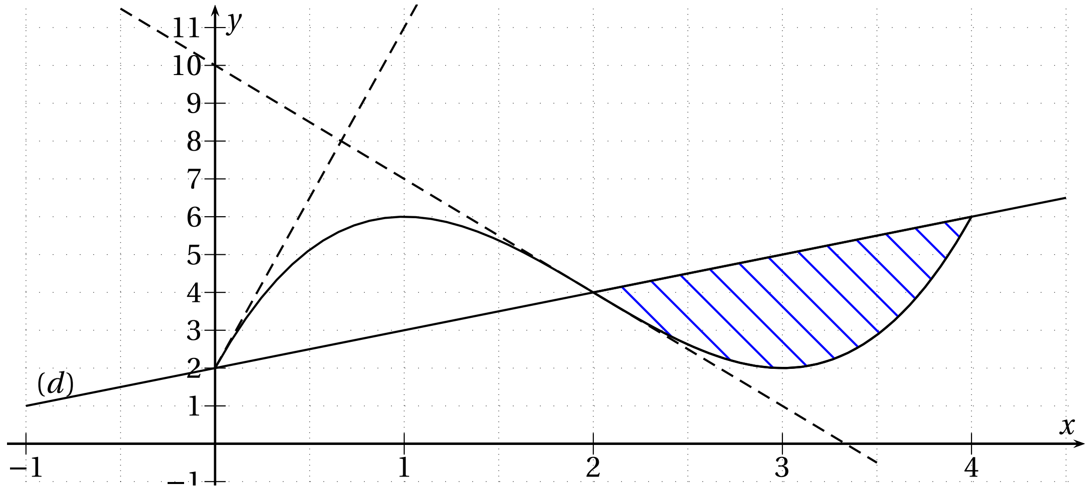
   (b) Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2\,;\,10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.

Partie III : Étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8\,;\,4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1'€).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

EXERCICE 7.17 (D'après Centres étrangers 2007)**.**
On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;4]$; sa courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal (1 unité = 2,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
On note f' la fonction dérivée de f.
Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite (d) d'équation $y = x + 2$.
Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$; (b) $f(1)$ et $f'(1)$; (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant x + 2$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire. Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques :
   (a) $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$ (b) $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 6$ (c) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$
3. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où $m,\ n,\ p$ et q sont des réels.
   (a) En utilisant les résultats de la question 1 a, déterminer p et q.
   (b) En utilisant les résultats de la question 1 b, déterminer m et n.
4. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.
   (a) Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.
   (b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.