Chapitre 6

Logarithme népérien

Sommaire

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.

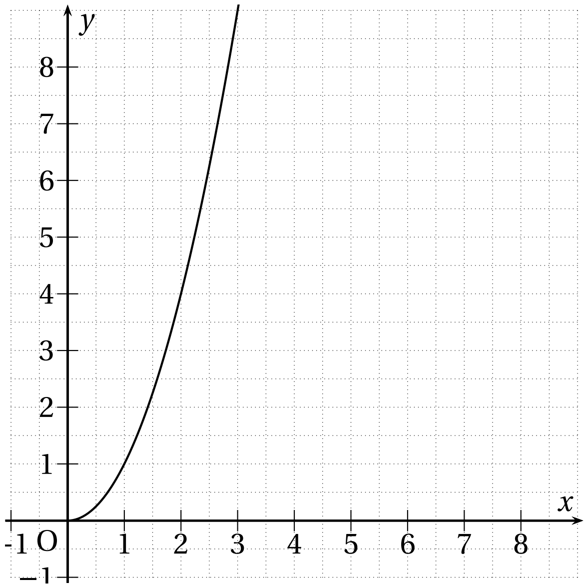
1. Pour quelles valeurs de k l'équation $\mathrm{e}^y = k$ admet-elle des solutions et, dans ce cas, combien de solution y a-t-il ?
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'arrondi, à 10^{-2}, des solutions des équations $\mathrm{e}^y = 2$ et de $\mathrm{e}^y = 3$.

ACTIVITÉ 6.2 (Fonctions réciproques).

Partie A : Fonction carré

On donne sur la figure ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2$.

1. Contruire sur la même figure la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
2. Construire sur la même figure la courbe $\mathscr{C}'$, symétrique de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Conjecturer quelle est la fonction usuelle dont $\mathscr{C}'$ est la courbe.
4. On admettra que si le point $(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ alors son symétrique par rapport à $\mathscr{D}$ est le point $(y\,;x)$. Prouver alors la conjecture du point précédent.



DÉFINITION. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
S'il existe une fonction g telle que, pour tout $x \in I$, on a $g\big(f(x)\big) = x$, alors g est appellée *fonction réciproque* de f.
Elle est parfois notée f^{-1}.

EXEMPLE.

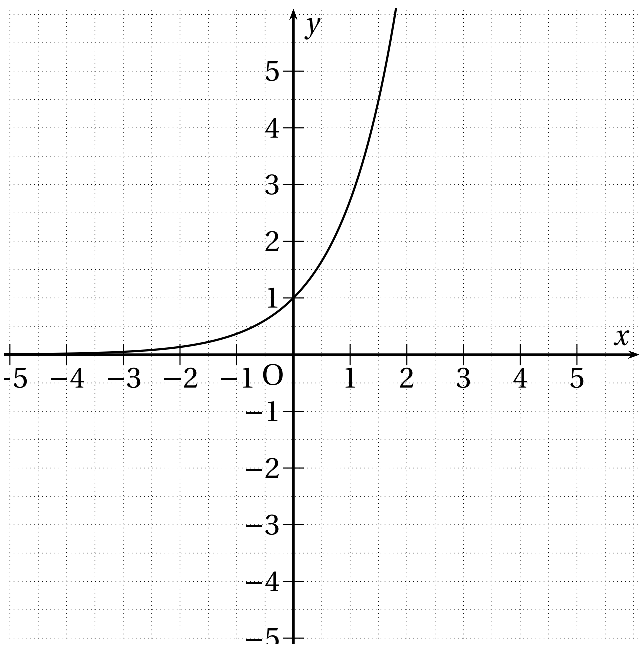
- Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction réciproque de la fonction racine est la fonction carrée car, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction réciproque de la fonction carrée est la fonction racine car, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\sqrt{x^2} = x$ (mais pas sur $\mathbb{R}$).

On admettra que les courbes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Partie B : Fonction exponentielle

On donne sur la figure ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

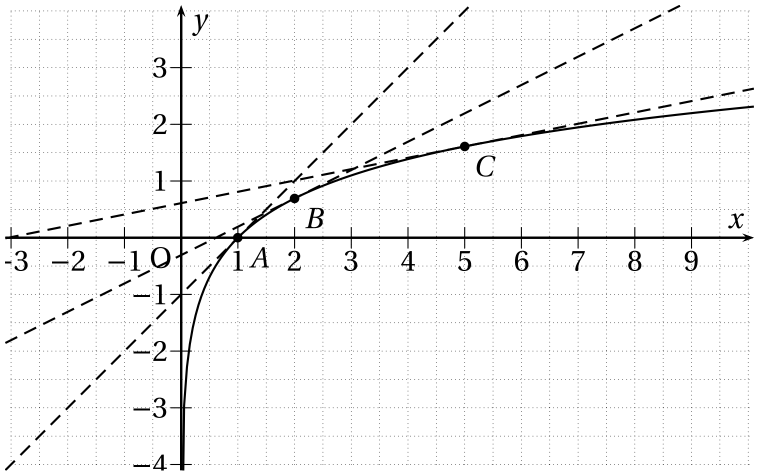
1. Contruire sur la même figure la courbe de la fonction g, réciproque de la fonction exponentielle.
2. Déterminer graphiquement :
   - l'ensemble de définition de g ;
   - les valeurs de $g(1)$ et de $g(\mathrm{e})$;
   - les variations de g.
3. Déterminer graphiquement $g(2)$ et $g(3)$ et comparer les résultats obtenus à ceux de l'activité 6.1.



Propriété. *La fonction exponentielle admet, sur* $\mathbb{R}$*, une fonction réciproque, appellée fonction* logarithme népérien*, notée* ln*, et on a donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\ln\left(e^x\right) = x$*.*
La fonction logarithme népérien admet, sur $]0\,;+\infty[$*, la fonction exponentielle comme fonction réciproque, et on a donc, pour tout* $x \in]0\,;+\infty[$*,* $e^{\ln(x)} = x$*.*

ACTIVITÉ 6.3 (Fonction dérivée de la fonction logarithme népérien)**.**
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ la fonction f est définie par $f : x \mapsto \ln(x)$.
Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative de la fonction f et les tangentes aux points A, B et C d'abscisses respectives 1, 2 et 5.

1. À l'aide du graphique, déterminer les valeurs approchées de $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(5)$.
2. Sur la calculatrice, afficher les valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$ dans un tableau de valeur pour x variant de 1 à 10.
3. À l'aide des points précédents, conjecturer la valeur de $f'(x)$ en fonction de x.
4. En déduire les variations de la fonction logarithme népérien.
5. En déduire l'expression de $f''(x)$ et la convexité de la fonction logartihme népérien.



ACTIVITÉ 6.4 (Une propriété du logarithme népérien)**.**

1. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs approchées à 10^{-2}, des nombres suivants :
   - $A = \ln(5) + \ln(7)$
   - $B = \ln(3) + \ln(11)$
   - $C = \ln(13) + \ln(6)$
   - $D = \ln(33)$
   - $E = \ln(78)$
   - $F = \ln(35)$

   Que constate-t-on ?
2. (a) D'après la propriété précédente, que vaut la quantité $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)}$?
   (b) D'après les propriétés algébriques de l'exponentielle et la propriété précédente, que vaut la quantité $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$?
   (c) Que peut-on en conclure ?
3. Les tables de logarithme de NÉPER premettaient, à une époque où il n'y avait pas de calculatrice, d'effectuer rapidement des multiplications grâce à la relation $\ln(a)+\ln(b) = \ln(a\times b)$ pour tous réels a et b strictement positifs.
   En se servant uniquement de l'extrait de table de logarithmes ci-contre et de la relation précente, donner une valeur approchée de $15,3 \times 7$.

x	6,9	7	7,1	…	15,1	15,2	15,3	…	107,1	107,2	107,3
$\ln(x)$	1,931	1,946	1,960	…	2,715	2,721	2,728	…	4,674	4,675	4,676

6.2 Un peu d'histoire

La fin du XVI^{è} est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (COPERNIC, KEPLER, etc.).
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on cherche des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondances les nombres de telle manière qu'à la *multiplication* de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'*addition* de deux nombres de la colonne de droite.
La première table de ce type est publiée par l'écossais JOHN NEPER en 1614, après quarante ans de travail, et il crée leur nom, composé des mots grec ancien *lógos* (« rapport ») et *arithmos* (« nombre »).
Le livre dans lequel figurait ces tables servait ainsi à déterminer et à noter sa position jour après jour, mais aussi la météo, l'état du navire, le moral de l'équipage...
Ce journal de bord s'appelait un *log-book*.
On a conservé ce terme et lorsque son support a changé, que le journal s'est écrit non plus sur un livre mais sur internet, il s'est dénommé *web-log* qui, par contraction, a donné le mot *blog* !

6.3 Logarithme népérien : définition et premières propriétés

6.3.1 Définition

On a vu au chapitre 4 que, pour tout $x > 0$, l'équation $\mathrm{e}^y = x$ admet une unique solution y appartenant à $\mathbb{R}$. Ce réel y, l'antécédent de x par la fonction exponentielle, sera noté $\ln(x)$.

Définition 6.1. Pour tout réel $x > 0$, on appelle *logarithme népérien* de x, et on note $\ln(x)$, l'unique réel dont l'exponentiel est x.
On a ainsi :
$$y = \ln(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$$

Remarques.
- On peut écrire $\ln a$ à la place de $\ln(a)$ quand il n'y a aucun risque de confusion.
- On a : $\ln(1) = 0$.
  En effet : par définition, $\ln(1)$ est l'unique réel dont l'exponentiel est 1, or $\mathrm{e}^0 = 1$ d'où $\ln(1) = 0$.
- On a : $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
  En effet : par définition, $\ln(\mathrm{e})$ est l'unique réel dont l'exponentiel est e, or $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ d'où $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Propriété 6.1. *Pour tout nombre x, on a* $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

Preuve. Par définition, $\ln(\mathrm{e}^x)$ est l'unique réel dont l'exponentiel est e^x, or l'unique réel dont l'exponentiel est e^x est x d'où $\ln(\mathrm{e}^x) = x$. ◇

On dit que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques.

6.3.2 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Théorème 6.2. *Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :* $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve. Ce théorème a été démontré à la question 2 de l'activité 6.4. ◇

Propriété 6.3. *Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n, on a :*
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Les preuves seront faites en classe.

6.4 Fonction logarithme népérien

6.4.1 Définition

Définition. On appelle fonction *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction

$$\begin{array}{rrcl} \ln: &]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

La fonction *logarithme népérien* est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.
On admettra que cette fonction est continue et dérivable.

6.4.2 Dérivée

Propriété 6.4. *La fonction logarithme népérien est dérivable et, pour tout $x > 0$, on a*

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

On l'admettra.

Propriété 6.5. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et on a :*

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve. La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse, or, quand $x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de $\ln(x)$ est donc strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ ce qui implique que la fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. ♢

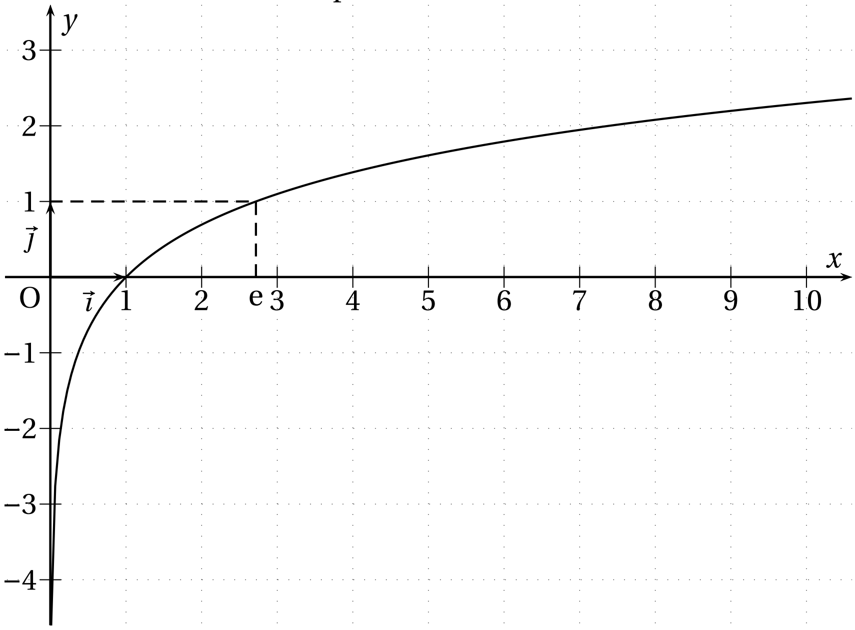
Propriété 6.6. *La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;+\infty[$.*

Cette propriété a été démontrée dans l'activité 6.3

6.4.3 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme est donnée par la figure 6.1 page suivante.

FIGURE 6.1: Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$



6.5 Exercices et problèmes

6.5.1 Propriétés algébriques

EXERCICE 6.1.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(6)-\ln(2)$
2. $\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln(3)-\ln(9)$
4. $\ln(2)+\ln(4)-\ln(8)$
5. $\frac{1}{4}\ln(81)$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+2\ln\left(\sqrt{3}\right)$
7. $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)-\ln(\sqrt{3}-1)$

EXERCICE 6.2.
Donner, en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ les valeurs de :

1. $\ln(10)$
2. $\ln(25)$
3. $\ln(16)$
4. $\ln(400)$
5. $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
7. $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
8. $\ln(0,4)$
9. $\ln\left(\sqrt{5}\right)$
10. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
11. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
12. $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

EXERCICE 6.3.
a et b étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3\times b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$
5. $\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)$
6. $\frac{\ln(a)}{\ln(ab^2)}$
7. $\frac{\ln(ab^4)}{\ln(b)}$

6.5.2 Résolutions

EXERCICE 6.4.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^x=2$
2. $e^x=\frac{1}{2}$
3. $e^x=-\frac{1}{2}$
4. $e^x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $e^x\geqslant 3$
6. $e^{x-4}\leqslant 1$
7. $e^{x+3}=e^{2x-1}$
8. $e^{2x-5}>e^x$
9. $e^{2x-1}<e$
10. $e^{(x-4)(2x-1)}=1$
11. $e^{4x+5}e^{2x-6}=1$
12. $e^{4x+5}e^{2x-6}=4$
13. $e^{2-x}=\frac{1}{e^{x^2+x-1}}$
14. $\frac{e^{2x-1}}{e^{-x+4}}=3$
15. $e^{3x-1}=4e^{x+1}$

EXERCICE 6.5.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs interdites pour x puis résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x) > 1$
2. $\ln(x) = 2$
3. $\ln(x) < -1$
4. $3 - \ln(x) \leqslant 0$
5. $\ln(x) = -3$
6. $2\ln(x+1) = 0$
7. $\ln(2x+1) = 1$
8. $\ln\left(x^2\right) = -1$
9. $\ln[x(x+1)] = 0$
10. $\ln(x) + \ln(x+1) = 0$
11. $x\ln(x) = 0$
12. $2\ln(x) - 1 \leqslant 0$
13. $2x\ln(x) + x = 0$
14. $(x-1)(1+\ln(x)) \geqslant 0$
15. $x\ln(x+2) = 0$

EXERCICE 6.6.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement : $f(x) = 3^x$ et $g(x) = 0,5^{x+3}$.

1. Afficher les courbes représentatives de ces deux fonctions sur la calculatrice.
2. Conjecturer l'existence de points d'intersection.
3. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 6.7.
Une personne se demande en combien de temps son capital C_0 doublera en le laissant placé aux taux annuels de $t\,\%$. Calculer le temps qu'il faut, en années et mois, pour que le capital C_0 double dans chacun des cas suivants :

- $t = 1$
- $t = 2$
- $t = 3$
- $t = 5$
- $t = 6$

6.5.3 Études de fonctions comportant $\ln(x)$

EXERCICE 6.8.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5\frac{\ln(x)}{x} + 3$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On y indiquera la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$.

EXERCICE 6.9 (D'après Asie Juin 2 007)**.**

Partie A
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on pose

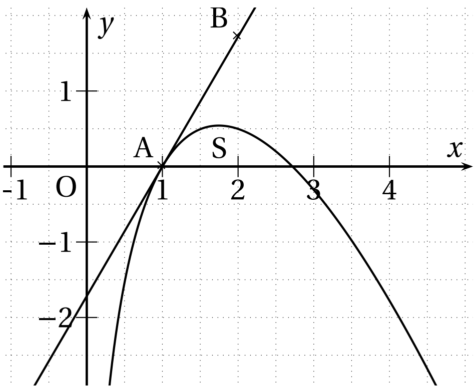
$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x).$$

1. On note f' la fonction dérivée de f sur $x \in]0\,;+\infty[$.
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{-2x^2+10x-8}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le tableau des variations de f.
2. On note f'' la dérivée seconde de f sur $x \in]0\,;+\infty[$.
   (a) Calculer $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de f selon les valeurs de x.
   (c) En déduire les éventuels points d'inflexion de la courbe de f.

Partie B
Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère que la fonction f définie sur $[1\,;6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. Montrer que la croissance du bénéfice va s'accélérer jusqu'à une certaine quantité de pièce à déterminer, puis que cette croissante ne va ensuite que ralentir.

EXERCICE 6.10 (D'après Liban 2 007).
On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormal.



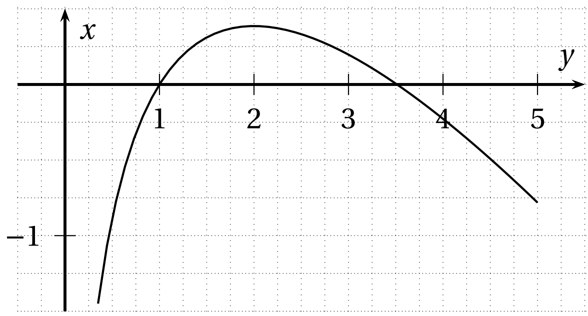
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A (1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$ où B est le point de coordonnées $(2 ; \mathrm{e}-1)$. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

Pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln(x)$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(\mathrm{e})$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} a\mathrm{e}+b = 0 \\ a+b = \mathrm{e}-1 \end{cases}$
   Déterminer a et b.

EXERCICE 6.11 (D'après Centres étrangers 2 006).
On désigne par f la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par : $f(x) = 1 - x + 2\ln(x)$.

La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.



1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations de f.
2. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3 ; 4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. On appelle g la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par : $g(x) = x\left(-\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 2\ln(x) - 1\right)$.
   (a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ sur $]0 ; 5]$.
   (b) En déduire les variations de g.

EXERCICE 6.12.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 2 - 2x\ln(x)$.

1. (a) Calculer la dérivée de f et montrer que l'on a : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$
   (b) Résoudre l'inéquation : $1 - 2\ln(x) > 0$
2. Recopier et compléter le tableau ci-contre en indiquant :
   (a) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x ;
   (b) la valeur exacte de $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$.
3. À l'aide de ce tableau de variations :
   (a) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   (b) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près de chaque solution indiquée.

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$		-2 ↗		↘	$-\infty$

EXERCICE 6.13 (D'après Polynésie – Septembre 2 007)**.**
Pour chacune des quatre propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e} + \frac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}x + \ln(5)$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 4) = 0$ est : $S = \{0\}$.
3. Si $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n \leqslant 0,7$ alors $n \geqslant \frac{\ln 0,7}{\ln 0,99}$.
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2 + 4x + 3\right) = \ln(5x + 9)$ est $S = \{-2 ; 3\}$.

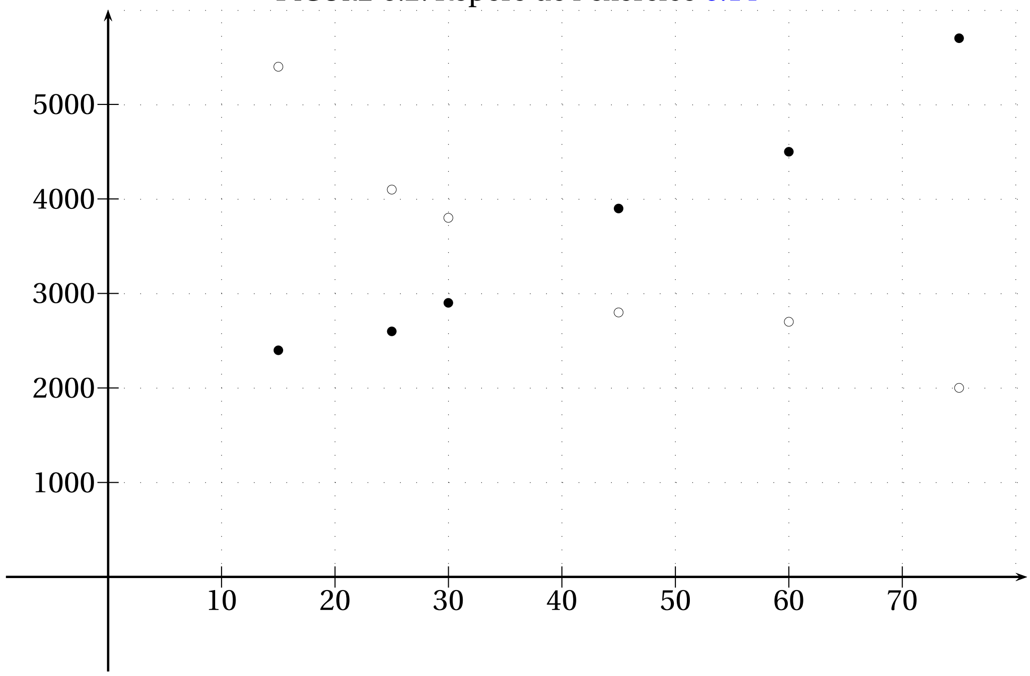
6.5.4 Modélisations

EXERCICE 6.14.
Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse sur une année 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 €. On désigne par x le prix d'un livre, par p le nombre de livres disponibles et par q le nombre de livres demandés. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
q	5 400	4 100	3 800	2 800	2 700	2 000

On a tracé sur la figure 6.2 de la présente page les nuages de points $(x_i ; p_i)$ et $(x_i ; q_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

FIGURE 6.2: Repère de l'exercice 6.14



1. On modélise l'évolution de p par la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{0,015x+7,538}$.
   (a) Recopier et compléter le tableau (les résultats seront arrondis au millième) :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
$f(x)$						

   (b) Déterminer l'erreur commise par la modélisation pour $x = 75$.

(c) En utilisant cette expression, donner une estimation du nombre de livre disponibles pour un prix unitaire de 34 € (*résultat arrondi à la dizaine*).

2. On modélise l'évolution de q par la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{-0,02x+8,73}$.
   En utilisant cette relation, donner une estimation du prix correspondant à une demande de 3 130 livres (*résultat arrondi à l'unité*).
3. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre ; il est noté x_0.
   (a) Déterminer par le calcul le prix d'équilibre, arrondi à l'unité.
   (b) Les calculs précédents permettaient-ils de prévoir le résultat ?

EXERCICE 6.15 (D'après Centres étrangers – Juin 2 009)**.**
Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.
Le tableau suivant indique la quantité extraite y_i en tonnes durant l'année désignée par son rang x_i :

Année	1963	1968	1973	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité extraite y_i en tonnes	18,1	15,7	13,3	11	9,3	7,8	7,1	6,1	5,2	4,3

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$de la figure 6.3 page suivante. Les unités graphiques de ce repère sont 1 unité = 1 cm en abscisse et 4 unités = 1,5 cm en ordonnée.
Dans cet exercice, on désigne par la variable y la quantité extraite en tonnes et par la variable x le rang de l'année.

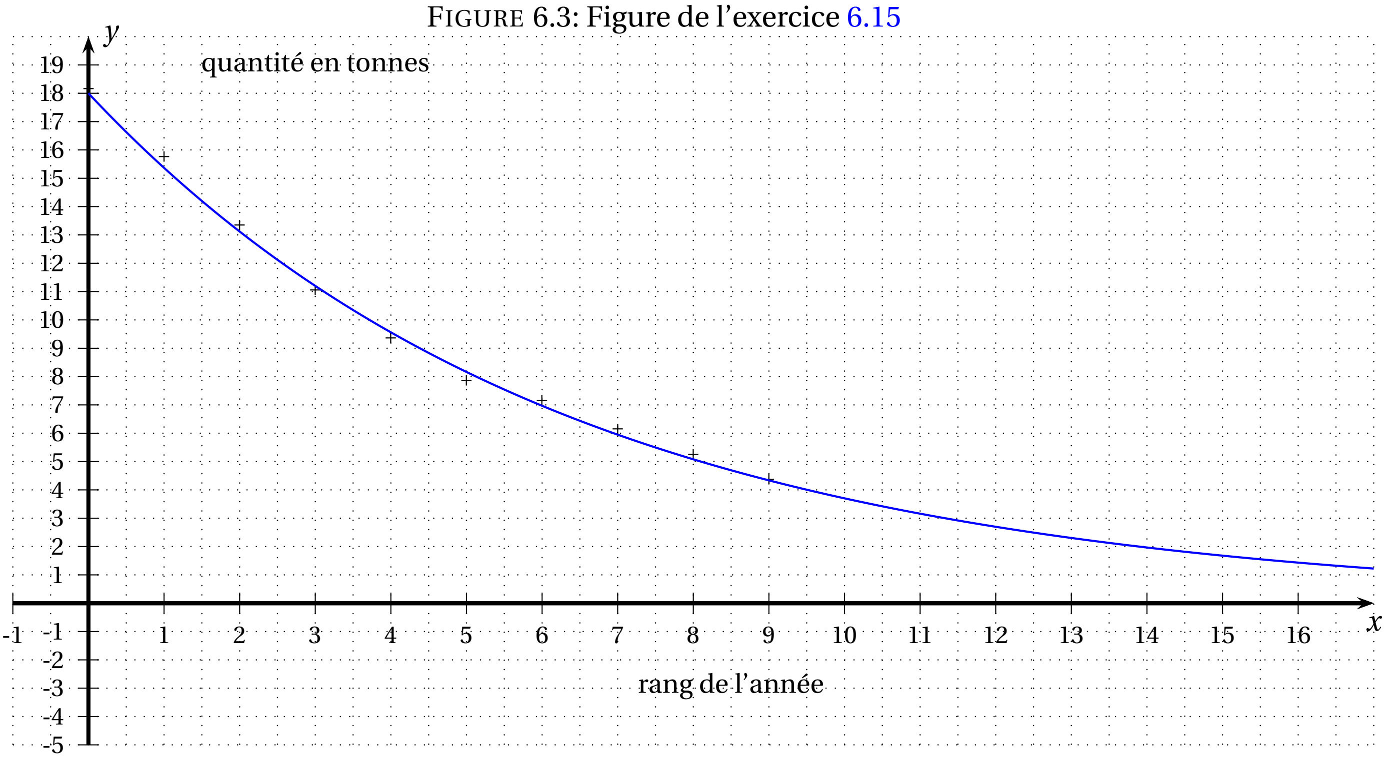
Première partie
En première approximation, on envisage de modéliser y en tant que fonction affine de x et on admet que la droite la plus proche du nuage de points a pour équation $y = -1,5x + 16,5$.

1. Tracer la droite dans le repère de la figure 6.3 page ci-contre.
2. En considérant cette modélisation, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

Deuxième partie
On admet que la courbe tracée sur la figure 6.3 page suivante représente une modélisation par une fonction exponentielle de y en fonction de x et que son équation est de la forme $y = k\mathrm{e}^{px}$ où k est un entier naturel et p un nombre réel.

1. En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que la modélisation laisse prévoir pendant l'année 2013.
2. En supposant que la courbe passe par les points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2), calculer l'entier naturel k et le réel p dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

FIGURE 6.3: Figure de l'exercice 6.15



EXERCICE 6.16 (D'après Polynésie – Juin 2009)**.**
Le tableau suivant donne l'évolution du marché des capteurs solaires installés en France métropolitaine entre 2000 et 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
Surface de capteurs solaires installés en milliers de m^2 : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	6	18	23	39	52	121	220	253

Source : ENERPLAN (*Association professionnelle de l'énergie solaire*)
L'objectif gouvernemental est d'atteindre un marché d'un million de m^2 en 2010.

1. (a) Calculer le pourcentage d'augmentation de la surface des capteurs solaires installés entre les années 2006 et 2007.
   (b) Si ce pourcentage reste le même d'année en année jusqu'en 2010. l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?
2. Sur une feuille de papier milimétré, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$; $1 \leqslant i \leqslant 8$, dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour une année en abscisse et en ordonnée 1 cm pour 20 milliers de m^2 de capteurs solaires installés).
3. La forme du nuage suggère de faire une modélisation exponentielle de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$.
   (a) Déterminer a et b, arrondis au centième, pour que la courbe de f passe par les points $(2;23)$ et $(3;39)$.
   (b) Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha \mathrm{e}^{\beta x}$, α étant arrondi à l'unité et β au centième.
   (c) On suppose que l'évolution se poursuit de cette façon jusqu'en 2010.
   À l'aide de cette modélisation exponentielle, estimer en m^2 la surface de capteurs solaires installés en 2010.
   Si l'évolution se poursuit selon ce modèle, l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?

6.5.5 Repère semi-logarithmique

EXERCICE 6.17.
On considère deux fonctions f et g croissantes données par les tableaux de valeurs :

x	0	2,7	4	5,4	7,4	9,1
$f(x)$	1	3	5	9	20	40

x	0	2,2	2,8	3,1	4,5	7
$g(x)$	1	5	8	10	20	50

1. Représenter les fonctions f et g dans le repère de la figure 6.4 page ci-contre.
2. Le repère de la figure 6.5 page suivante est appelé repère semi-logarithmique.
La graduation sur l'axe (Oy) n'est pas « régulière ». Elle est réalisée proportionnellement au logarithme népérien. Par exemple un point d'ordonnée $y = 1$ est placé à la hauteur $z = \ln 1 = 0$ unités graphiques, un point d'ordonnée $y = 10$ est placé à la hauteur $z = \ln 10 \approx 2,3$ unités graphiques (et ici 1 unité graphique = 2 cm).
Remarque. Dans le cadre de cet exercice, pour une meilleure lecture des hauteurs en unités graphiques, un axe a été ajouté à droite.

Pour l'utilisation d'un tel repère on pourra s'aider du tableau suivant :

Point	A	B	…
x			…
y			…
$z = \ln y$			…

Où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique.
   (a) Placer dans ce repère les points suivants :
   - $A(2; 1,5)$
   - $B(5; 15)$
   - $C(5; 19)$
   - $D(12; 175)$

   (b) Déterminer les coordonnées des points E, F, G et H.
   Indication : on mesurera z avec une règle avant de déterminer y par le calcul.
   (c) Représenter les courbes de f et de g dans ce repère. Que remarque-t-on pour la courbe de f ?
   (d) Représenter dans les deux repères les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par, respectivement, $h(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $l(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$. Que remarque-t-on ?
   (e) Une fonction k est représentée dans le repère semi-logarithmique une droite passant par les points $(0; 1)$ et $(14; 1\,000)$.
      i. Tracer cette droite.
      ii. À l'aide d'une règle compléter la ligne z du tableau ci-dessous et compléter par la ligne y par le calcul.

x	0	1	3	5	10
z					
$y = \ldots\ldots$					

      iii. Représenter alors k dans le premier repère.
   (f) Démontrer que lorsqu'une fonction positive est représenté dans un repère semi-logarithmique par une droite passant par l'origine, cette fonction est de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
   Indication : On posera $z = mx$, où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique et on déterminera alors une expression de y en fonction de x.
   En utilisant l'égalité $f(4) = 5$ donner l'expression de $f(x)$.
   Déterminer l'expression de $k(x)$.
   (g) Démontrer que lorsqu'une fonction positive représentée dans un repère semi-logarithmique par une droite d'équation $z = mx + p$ où z est la hauteur en unités graphiques, cette fonction est de la forme $f(x) = K\mathrm{e}^{kx}$.
   Exprimer alors K et k en fonction de m et p.

FIGURE 6.4: Premier repère de l'exercice 6.17

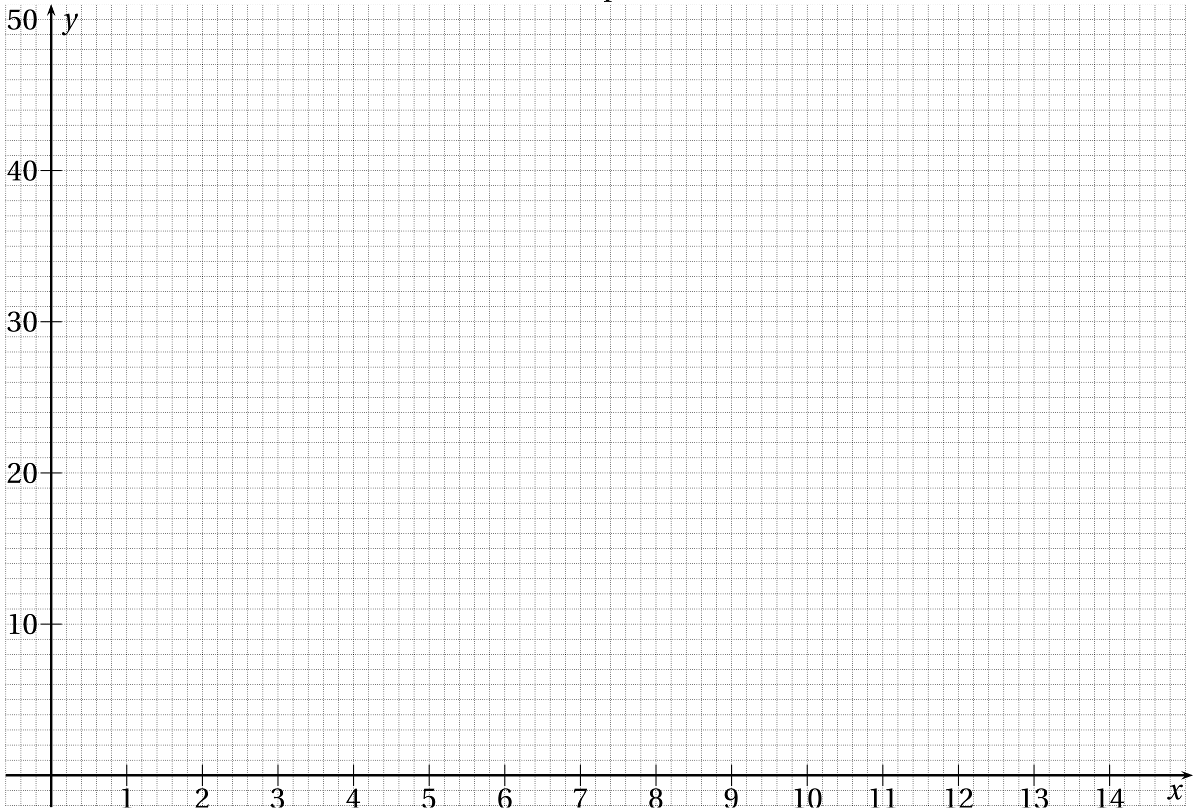


FIGURE 6.5: Repère semi-logarithmique de l'exercice 6.17