Devoir surveillé n°9

Fonctions composées, logarithme, exponentielle

EXERCICE 9.1 (6 points)**.**
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée la figure 9.1 page 173 représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A$(-3\,;1)$ et B$(-1\,;3)$. Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.

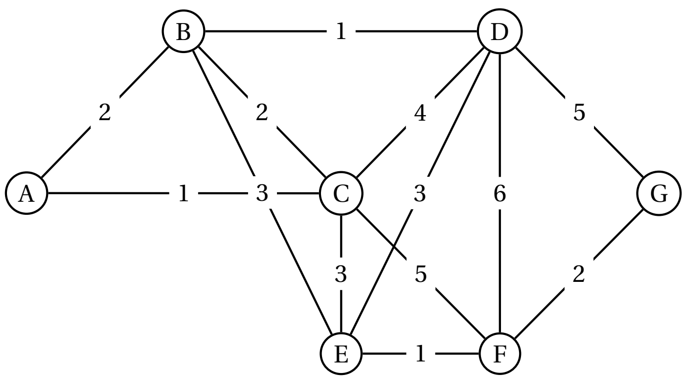
1. Sans justifier, déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   (c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-3,1\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln\left[f(x)\right]$. On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]-3,1\,;+\infty[$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ (on justifiera le résultat).
   (b) Calculer $h'(-3)$.

EXERCICE 9.1 (6 points)**.**
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

Le graphe ci-contre représente le plan d'une ville.

Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.

Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I On s'intéresse au graphe non pondéré.

1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :
   (a) Ce graphe est-il connexe ?
   (b) Ce graphe est-il complet ?
   (c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
   (d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?
2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

Partie II On s'intéresse au graphe pondéré.
Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.
La réponse sera justifiée par un algorithme.

EXERCICE 9.2 (6 points).
Le responsable d'un site Internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site chaque semaine.

Partie A

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées, exprimé en milliers, durant chacune des quatre semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$	1	2	3	4
Nombre de pages visitées en milliers : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$	40	45	55	70

Ainsi, au cours de la deuxième semaine après l'ouverture du site, 45 000 pages ont été visitées.

1. Le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ associé à cette série statistique est représenté sur la figure 9.3 page 175 dans un repère orthogonal. L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.
   (a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage puis placer ce point sur le graphique de la figure 9.3.
   (b) On appelle (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Parmi les deux propositions ci-dessous, une seule correspond à l'équation réduite de la droite (d). Préciser laquelle, en utilisant le point moyen G :
      - $y = 9x + 29$
      - $y = 10x + 27{,}5$

   (c) Tracer la droite (d) sur le graphique de la figure 9.3.
2. En supposant que cet ajustement reste valable pendant les deux mois qui suivent l'ouverture du site, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

Partie B

Le responsable décide de mettre en place, au cours de la quatrième semaine suivant l'ouverture du site, une vaste campagne publicitaire afin d'augmenter le nombre de visiteurs du site.

Il étudie ensuite l'évolution du nombre de pages du site visitées au cours des trois semaines suivant cette opération publicitaire.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées au cours des sept semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pages visitées en milliers : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	40	45	55	70	95	125	175

1. Compléter le nuage de points fourni sur la figure 9.3 par les trois nouveaux points définis dans le tableau précédent.
   Compte tenu de l'allure du nuage, un ajustement exponentiel semble approprié.
   Pour cela on pose $z = \ln y$.
2. On donne ci-dessous les valeurs de $z_i = \ln\left(y_i\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 7$, les résultats étant arrondis au centième.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln\left(y_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant 7$	3,69	3,81	4,01	4,25	4,55	4,83	5,16

   (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, en arrondissant les coefficients a et b au centième.
   (b) En déduire la relation $y = \alpha e^{\beta x}$, où $27{,}94$ et $0{,}25$ sont des valeurs approchées au centième des réels α et β respectivement.
   (c) À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.
   Combien de semaines auraient été nécessaires pour atteindre ce résultat sans campagne publicitaire ? (on utilisera l'ajustement obtenu dans la **partie A**).

EXERCICE 9.3 (8 points)**.**
Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.
L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

On rappelle que :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$
- *la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est égale à* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0;+\infty[$.
   Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0\,;5]$.
   Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$ est donnée sur la figure 9.2 page suivante.
   (a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $F(x) = (-2-2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur cet intervalle.
   (b) Calculer la valeur moyenne m (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.
   On déterminera la valeur exacte de m puis on donnera sa valeur approchée arrondie à $0{,}01$ ppm près.
3. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

   On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse $0{,}65$ ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

FIGURE 9.1 – Figure de l'exercice 9.1

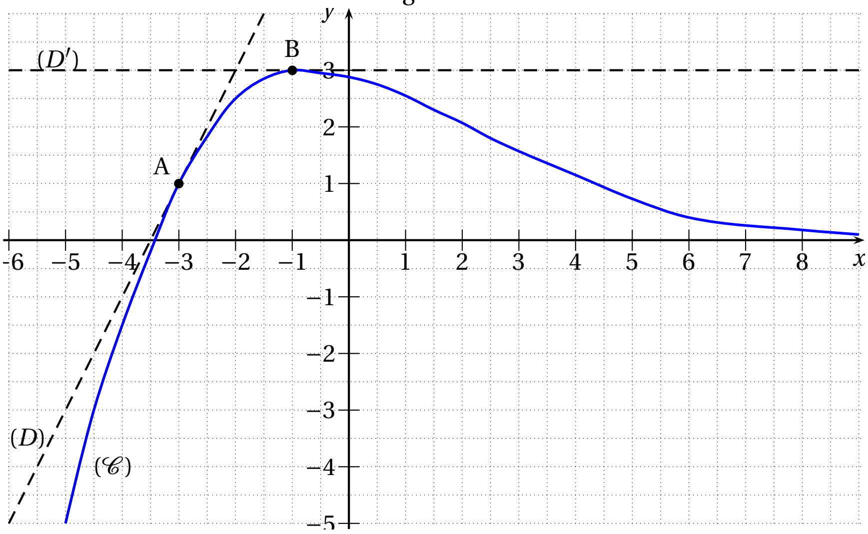


FIGURE 9.2 – Figure de l'exercice 9.3 : Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

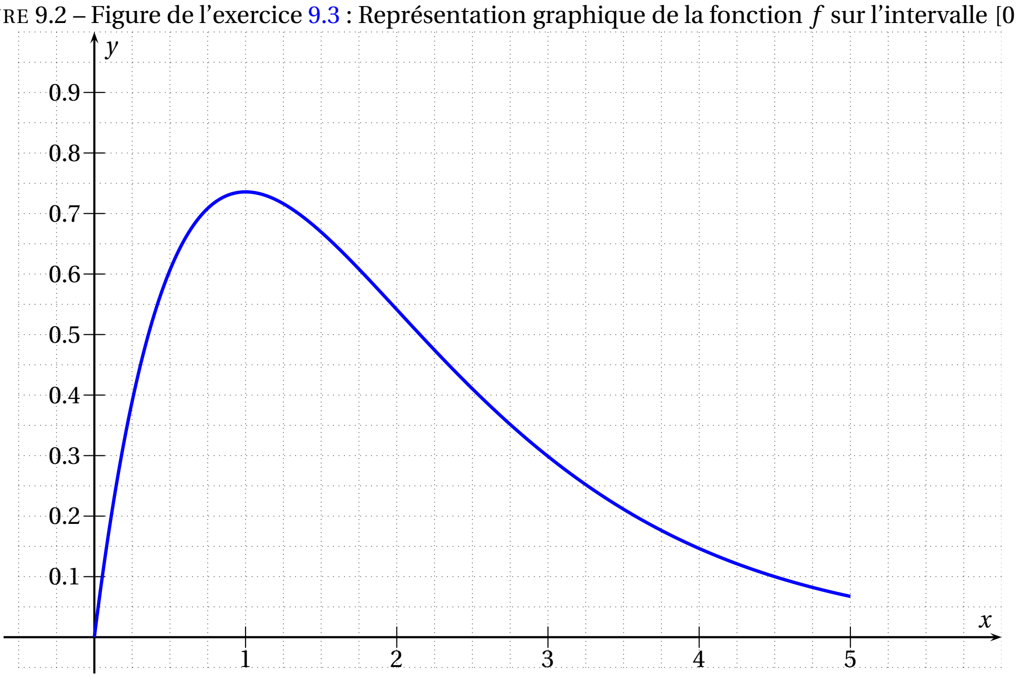


FIGURE 9.3 – Figure de l'exercice 9.2