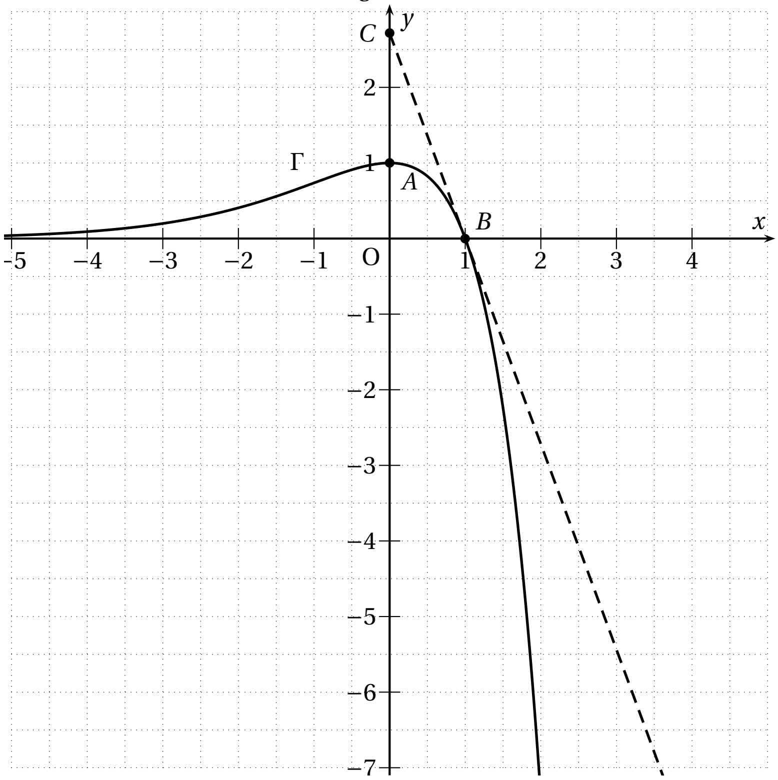
Devoir surveillé n°9

ln u, exp u

EXERCICE 9.1 (10 points)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On note e le nombre tel que ln(e) = 1.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur la figure 9.1 de la présente page.
On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(0;1)$;
- la droite (BC) est la tangente à la courbe Γ au point $B(1;0)$, C étant le point de coordonnées $(0;\text{e})$;
- la fonction f est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$;
- la courbe Γ admet, en $-\infty$, l'axe des abscisses comme asymptote ;
- la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$.

FIGURE 9.1 – Figure de l'exercice 9.1



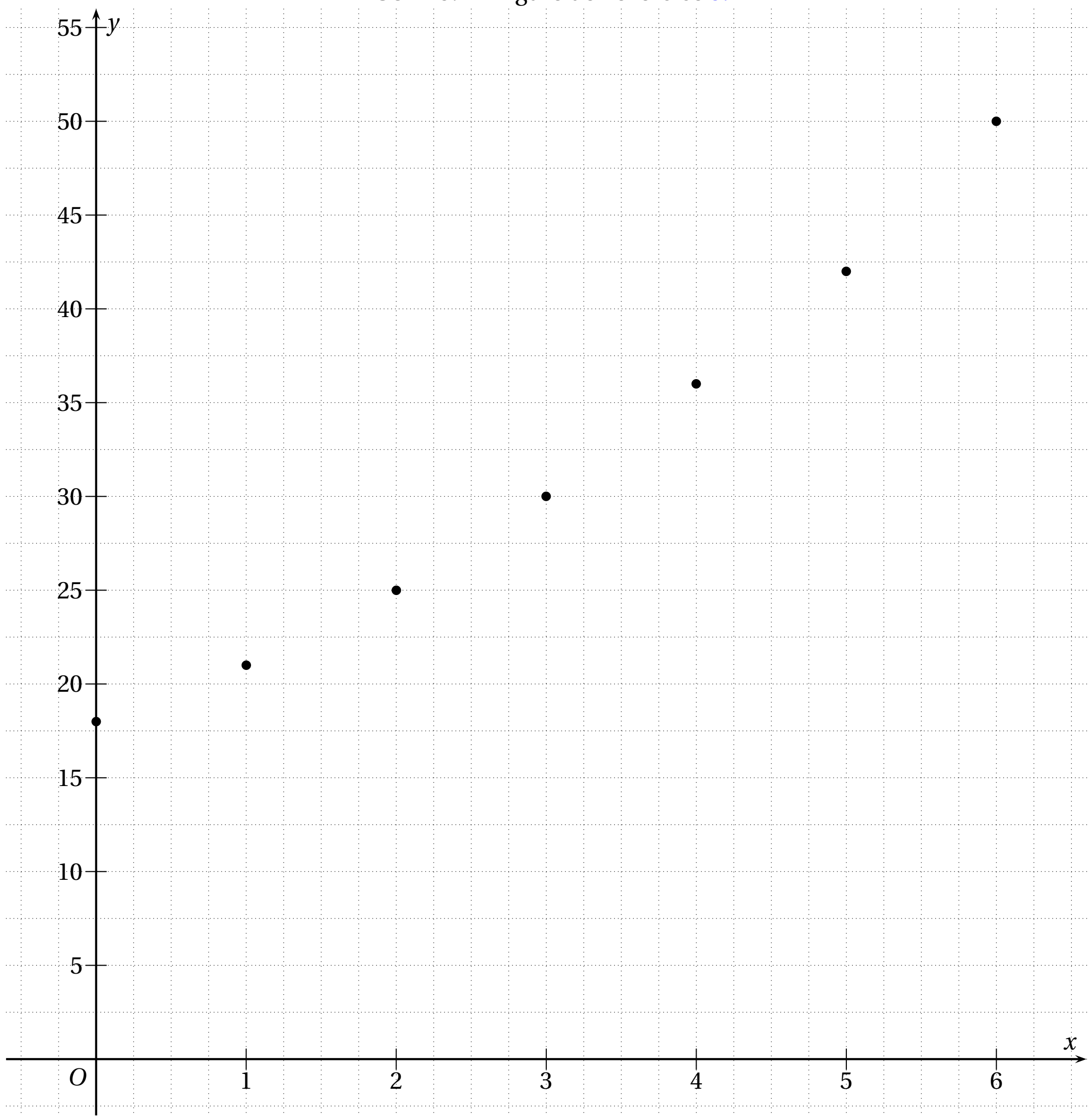
1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$;
   (b) le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ;
   (c) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \exp[f(x)]$ déinie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Déterminer les variations de g (*on répondra à cette question sans faire de tableau de variations*).
   (c) Déterminer les valeurs exactes de $g(0)$, $g(1)$, $g'(0)$ et $g'(1)$.
   (d) Dresser le tableau des variations de g.
3. On admet que la fonction f a pour expression $f(x) = (-x+1)\text{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto (-x+2)\text{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de f.
   (b) On appelle $\mathscr{D}$ la quantité $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\text{d}t$.
      i. Représenter $\mathscr{D}$ en rouge sur la figure.
      ii. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{D}$.

EXERCICE 9.2 (10 points).
Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1 970 et 2 000.

Année	1 970	1 975	1 980	1 985	1 990	1 995	2 000
Rang de l'année x	0	1	2	3	4	5	6
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté sur la figure 9.2 de la présente page : le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.

FIGURE 9.2 – Figure de l'exercice 9.2



On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau *(les résultats seront arrondis au millième)* :

x	0	1	2	3	4	5	6
z	2,890						

2. *Dans cette question, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*
   À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés *(les coefficients seront arrondis au millème)*.
3. En déduire y en fonction de x.
4. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{px}$ en arrondissant k et p au millième.
5. Pour la suite nous prendrons l'approximation $y = 17,8e^{0,17x}$ et nous supposerons qu'elle reste valable pour les années suivantes.
   (a) Donner une estimation de la population de la ville en 2 005, arrondie à l'unité.
   (b) Donner une estimation de l'année où la population dépassera 100 000 habitants.