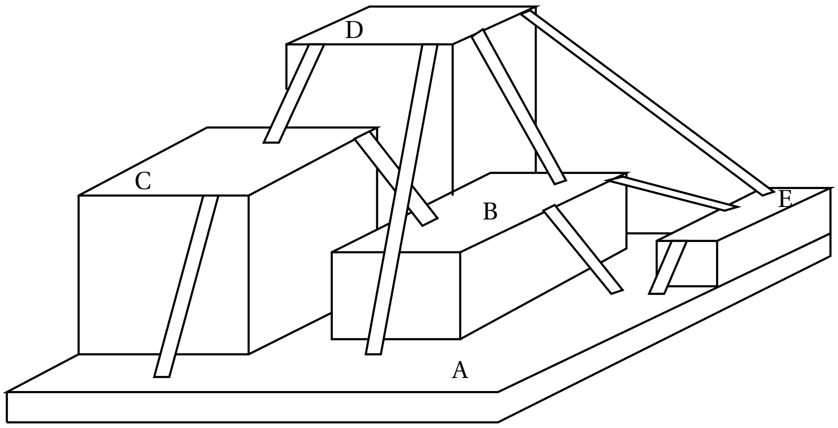
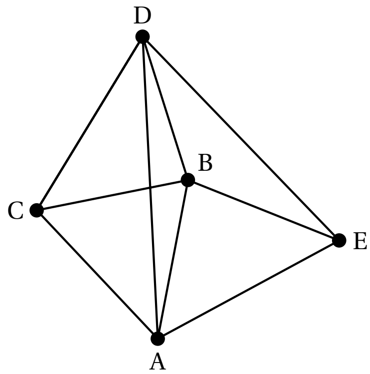
# Devoir surveillé n°7 (spécialistes)

Logarithme népérien – Lois de probabilités – Coloration de graphes

**EXERCICE 7.1** (5 points)**.**
*Pour les élèves **ayant** suivi l'enseignement de spécialité.*
On considère un espace de jeu réservé à des enfants.
Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E.
Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-dessous :




On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-contre :
Une plate-forme est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.




**Partie A**

1. Donner un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe G.
2. En déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
3. À l'aide d'un algorithme de coloration, procéder à une coloration du graphe G.
4. En déduire la valeur du nombre chromatique du graphe G.

**Partie B**

1. Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ? Justifier les réponses.
2. Ce graphe contient-il une chaine eulérienne ? Justifier la réponse.
3. Si on rajoute une arête à ce graphe, quels sommets peut-on alors relier pour que le graphe obtenu contienne un cycle eulérien ? Justifier la réponse.

**Partie C**
On décide de peindre les surfaces des cinq plates-formes en attribuant des couleurs différentes à deux plates-formes reliées par une rampe.

1. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire ? Justifier la réponse.
2. On propose aux enfants le jeu suivant : il s'agit de partir de la plateforme C et de rejoindre la plateforme E en utilisant toutes les rampes, et sans passer deux fois par la même rampe.

   Proposer un chemin remplissant les conditions exposées ci-dessus.
3. Pour faciliter le déplacement des enfants dans cet espace de jeu, on décide d'installer une nouvelle rampe. Où peut-on placer cette rampe pour obtenir l'existence d'un chemin qui, partant d'une plate-fonne donnée, emprunte une et une seule fois chaque rampe pour revenir à la plate-fonne initiale ? Justifier la réponse.

**EXERCICE 7.2** (5 points).
On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle $]0\,;\,20]$ par

$$f(x) = \left(3\mathrm{e}^2 - x\right)\ln x + 10.$$

**Partie A**

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en 0.
   (b) Calculer la valeur exacte de $f\left(\mathrm{e}^2\right)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Montrer que, pour tout $x$ de $]0\,;\,20]$, $f'(x) = -\ln x + \frac{3\mathrm{e}^2}{x} - 1$ où $f'$ désigne la dérivée de la fonction $f$.
3. On admet que la fonction dérivée $f'$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

| $x$ | 0 | | $\mathrm{e}^2$ | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | ↘ | 0 | ↘ | |

   (a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,20]$.
   (b) En déduire le tableau de variations de $f$ sur cet intervalle.
4. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0{,}6\ ;\ 0{,}7]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution notée $\alpha$. À la calculatrice, donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0,001 près par excès.
   (b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $]0\,;\,20]$.

**Partie B**
Une entreprise produit et vend chaque semaine $x$ milliers de DVD, $x$ appartenant à $]0\,;\,20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où $f$ est la fonction étudiée dans la partie A.
En utilisant les resultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

**EXERCICE 7.3** (5 points).
On considère une roue partagée en 10 secteurs égaux tels que :
- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a trois secteurs de couleur verte (V)
- il y a six secteurs de couleur bleue (B)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et il gagne :
- 0 € si le bleu sort ;
- 2 € si le vert sort ;
- 3 € si le rouge sort.

On appelle $X$ le gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $\Omega$ associé à $X$.
2. Décrire la loi de probabilité associée à $X$ (on la présentera sous forme de tableau).
3. (a) Calculer l'espérance de cette loi de probabilité. Interpréter le résultat.
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur ou le joueur ?
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur, ni le joueur ne sont avantagés. Comment modifier les gains pour que le jeu soit équitable ?

**EXERCICE 7.4** (5 points).
Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

1. Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.
   On appelle $X$ le nombre de paniers marqués.
   (a) Montrer que $P(X = 0) = 0{,}0256$ et interpréter le résultat.
   (b) Calculer $P(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat.
   (c) Calculer l'espérance de $X$ et interpréter le résultat.
2. Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ? Dans ce cas combien peut-il espérer marquer de paniers ?
   *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*