Devoir surveillé n°7 (non spécialistes)

Logarithme népérien – Lois de probabilités

EXERCICE 7.1 (5 points).
Pour les élèves ***n'ayant pas*** *suivi l'enseignement de spécialité.*
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque réponse incorrecte retire 0,5 *point, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. $\frac{\ln(e^2)}{\ln(16)}$ est égal à :
   ❒ $2\ln\left(\frac{e}{4}\right)$ ❒ $\frac{1}{2\ln(2)}$ ❒ $2\ln(2)-\ln(16)$
2. Pour tous réels a et b, strictement positifs, $\ln(ab)-\ln\left(a^2\right)$ est égal à :
   ❒ $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ❒ $\ln(b-a)$ ❒ $\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
3. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble S des solutions de l'équation $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$ est :
   ❒ $S=\{3\,;\,-3\}$ ❒ $S=\{3\}$ ❒ $S=\varnothing$
4. Dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'ensemble S des solutions de l'inéquation $2\ln(x)-1>1$ est :
   ❒ $S=\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ ❒ $S=]1\,;\,+\infty[$ ❒ $S=]e\,;\,+\infty[$
5. f est la fonction définie sur l'intervalle $I=]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{5}{x}$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné du plan. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à :
   ❒ $5\ln(2)$ ❒ $\ln(10)-\ln(5)$ ❒ $\ln\left(\frac{2}{5}\right)-\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

EXERCICE 7.2 (5 points).
On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,20]$ par

$$f(x)=\left(3e^2-x\right)\ln x+10.$$

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en 0.
   (b) Calculer la valeur exacte de $f\left(e^2\right)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Montrer que, pour tout x de $]0\,;\,20]$, $f'(x)=-\ln x+\frac{3e^2}{x}-1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0\,;\,20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖	↘	0	↘	

   (a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,20]$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0{,}6\ ;\ 0{,}7]$, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,001 près par excès.
   (b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $]0\,;\,20]$.

Partie B
Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0\,;\,20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.
En utilisant les resultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

EXERCICE 7.3 (5 points).
On considère une roue partagée en 10 secteurs égaux tels que :
- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a trois secteurs de couleur verte (V)
- il y a six secteurs de couleur bleue (B)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et il gagne :
- 0 € si le bleu sort ;
- 2 € si le vert sort ;
- 3 € si le rouge sort.

On appelle X le gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers Ω associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. (a) Calculer l'espérance de cette loi de probabilité. Interpréter le résultat.
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur ou le joueur ?
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur, ni le joueur ne sont avantagés. Comment modifier les gains pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 7.4 (5 points).
Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

1. Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.
   On appelle X le nombre de paniers marqués.
   (a) Montrer que $P(X = 0) = 0,0256$ et interpréter le résultat.
   (b) Calculer $P(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat.
   (c) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
2. Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ? Dans ce cas combien peut-il espérer marquer de paniers ?
   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.