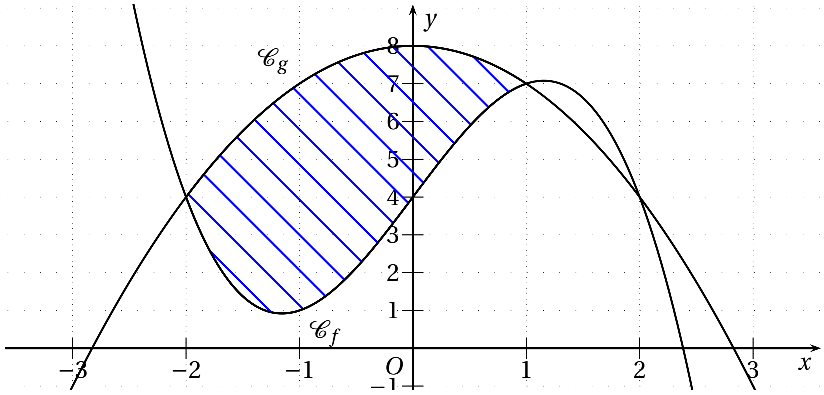
Devoir surveillé n°5 – TES2

Probabilités conditionnelles – Calcul intégral – Suites

EXERCICE 5.1 (6 points)**.**
On a tracé, sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives de f et de g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 4x + 4$ et $g(x) = -x^2 + 8$.
On appelle f' la fonction dérivée de f.



1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comprise dans l'intervalle $[2\,;3]$.
   (b) Donner une valeur approchée de α au dixième.
   (c) Dresser alors le tableau de signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3. (a) On pose $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 4x + 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.
      i. Montrer que F est une primitive de f.
      ii. À l'aide des questions précédentes et sans calcul, déterminer les variations de F.
   (b) Déterminer l'expression de G, la primitive de g telle que $G(-2) = 0$.
   (c) i. Déterminer $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
      ii. Sachant qu'une unité vaut 1,5 cm sur les abscisses et 0,5 cm sur les ordonnées, déterminer $\mathscr{A}$ en cm^2.

EXERCICE 5.2 (8 points)**.**
Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via *Internet*. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.
L' éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.
On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel :
- la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à $0,2$;
- s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à $0,4$;
- s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à $0,1$.

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.
On cosidère les évènements suivants :
- P : « la personne s'abonne à l'édition papier » ;
- E : « la personne s'abonne à l'édition électronique » ;
- $\overline{\text{P}}$ l'évènement contraire de P ;
- $\overline{\text{E}}$ l'évènement contraire de E.

1. (a) Construire un arbre probabiliste modélisant la situation.
   (b) Donner la probabilité de E sachant P et la probabilité de E sachant $\overline{\text{P}}$.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.
   (b) Justifier que la probabilité de l'évènement E est égale à $0,16$.
3. (a) On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?
   (b) Calculer $p_E\left(\overline{\text{P}}\right)$. Interpréter ce résultat.
4. Les évènements P et E sont-ils indépendants ?

EXERCICE 5.3 (6 points).
*Pour les élèves **n'ayant pas** suivi l'enseignement de spécialité.*
Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client.
Cette machine distribue soit un expresso, soit du chocolat, soit du thé en suivant une programmation erronée.
Chaque boisson peut être sucrée ou non.

- La probabilité d'obtenir un expresso est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$.
- Si l'on obtient un expresso, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$.
- Si l'on obtient un chocolat, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.

On pourra considérer les évènements suivants :

- T : « On a obtenu un thé ».
- E : « On a obtenu un expresso ».
- C : « On a obtenu un chocolat ».
- S : « La boisson obtenue est sucrée ».

Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Construire un arbre probabiliste modélisant la situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un expresso sucré.
3. On sait que la probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$. En déduire que la probabilité d'obtenir un chocolat sucré est $\frac{1}{18}$.
4. En déduire la probabilité d'obtenir un chocolat puis celle d'obtenir un thé.

EXERCICE 5.3 (6 points).
*Pour les élèves **ayant suivi** l'enseignement de spécialité.*
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

1. On a construit sur la figure ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{2}{1+x}$ et la droite Δ d'équation $y = x$.
   (a) Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) sur cette figure.
   (b) Que peut-on conjecturer sur la convergence de (u_n) ?
2. (a) Vérifier que u_0 et u_1 et u_2 sont strictement positifs.
   (b) Montrer que si u_p est strictement positif, alors u_{p+1} est aussi strictement positif.
   (c) Conclure.
   (d) En déduire un minorant de (u_n).
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2
   (b) Montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$. Quelle est alors la nature de la suite (v_n) ?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   (e) En déduire la convergence de la suite (u_n).