

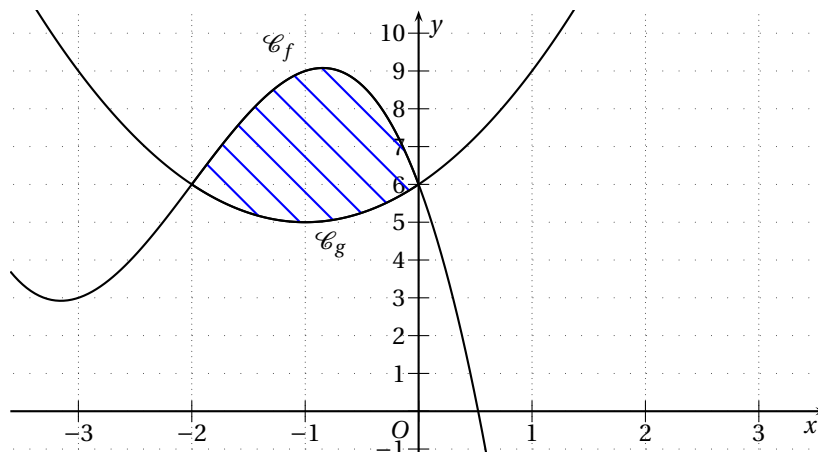
## Devoir surveillé n°5 – TES1

### Probabilités conditionnelles – Calcul intégral – Suites

#### EXERCICE 5.1 (6 points).

On a tracé, sur le graphique ci-dessous,  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$ , deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 8x + 6$  et  $g(x) = x^2 + 2x + 6$ .

On appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .



- Calculer  $f'(x)$ , étudier son signe et dresser le tableau des variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  comprise dans l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - Donner une valeur approchée de  $\alpha$  au dixième.
  - Dresser alors le tableau de signe de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
- On pose  $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 16$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
    - Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$ .
    - À l'aide des questions précédentes et sans calcul, déterminer les variations de  $F$ .
  - Déterminer l'expression de  $G$ , la primitive de  $g$  telle que  $G(-2) = 0$ .
  - Déterminer  $\mathcal{A}$ , l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
    - Sachant qu'une unité vaut 1,5 cm sur les abscisses et 0,5 cm sur les ordonnées, déterminer  $\mathcal{A}$  en  $\text{cm}^2$ .

#### EXERCICE 5.2 (8 points).

Une entreprise démarché des clients potentiels et leur propose un accès à internet ainsi qu'un forfait de téléphonie mobile. Il est possible de prendre seulement l'accès à internet ou seulement le forfait de téléphonie mobile, de prendre les deux ou de ne prendre aucun des deux. On admet que lorsqu'un client potentiel est contacté :

- la probabilité qu'il prenne l'accès à internet est égale à 0,1 ;
- s'il prend l'accès à internet, la probabilité qu'il prenne aussi le forfait de téléphonie mobile est égale à 0,3.

Une personne figurant sur la liste de clients potentiels est contactée.

On considère les événements suivants :

- A : « la personne prend l'accès à internet » ;
- $\bar{A}$  l'évènement contraire de A ;
- T : « la personne prend le forfait de téléphonie mobile » ;
- $\bar{T}$  l'évènement contraire de T.

- Construire un arbre probabiliste modélisant la situation.
  - Donner la probabilité de T sachant A.
- Calculer la probabilité que la personne contactée prenne l'accès à internet et le forfait de téléphonie mobile.
- On sait que la probabilité que la personne contactée prenne le forfait de téléphonie mobile est 0,2.
  - Déterminer la probabilité que la personne contactée prenne le forfait de téléphonie mobile et ne prenne pas l'accès à internet.
  - On suppose que la personne contactée n'a pas pris l'accès à internet. Déterminer la probabilité que la personne contactée prenne le forfait de téléphonie mobile.
  - On suppose que la personne a pris le forfait de téléphonie mobile. Quelle est alors la probabilité qu'elle ait pris l'accès à internet.
  - Calculer  $p_T(\bar{A})$ . Interpréter ce résultat.
- Les événements A et T sont-ils indépendants ?

**EXERCICE 5.3** (6 points).

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n}$ .

1. On a construit sur la figure ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = \frac{6}{1+x}$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .
  - (a) Construire la représentation graphique en chemin de la suite  $(u_n)$  sur cette figure.
  - (b) Que peut-on conjecturer sur la convergence de  $(u_n)$  ?
2. (a)
  - i. Vérifier que  $u_0, u_1$  et  $u_2$  appartiennent à  $[1; 5]$ .
  - ii. Montrer que si  $u_p$  appartient à  $[1; 5]$ , alors  $u_{p+1}$  appartient aussi à  $[1; 5]$ .
  - iii. Conclure.
- (b) Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)$  ?

3. Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$ .

- (a) Calculer  $v_0, v_1$  et  $v_2$
- (b) Montrer que  $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$ . Quelle est alors la nature de la suite  $(v_n)$  ?
- (c) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- (d) En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (e) En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

