Devoir surveillé n°4

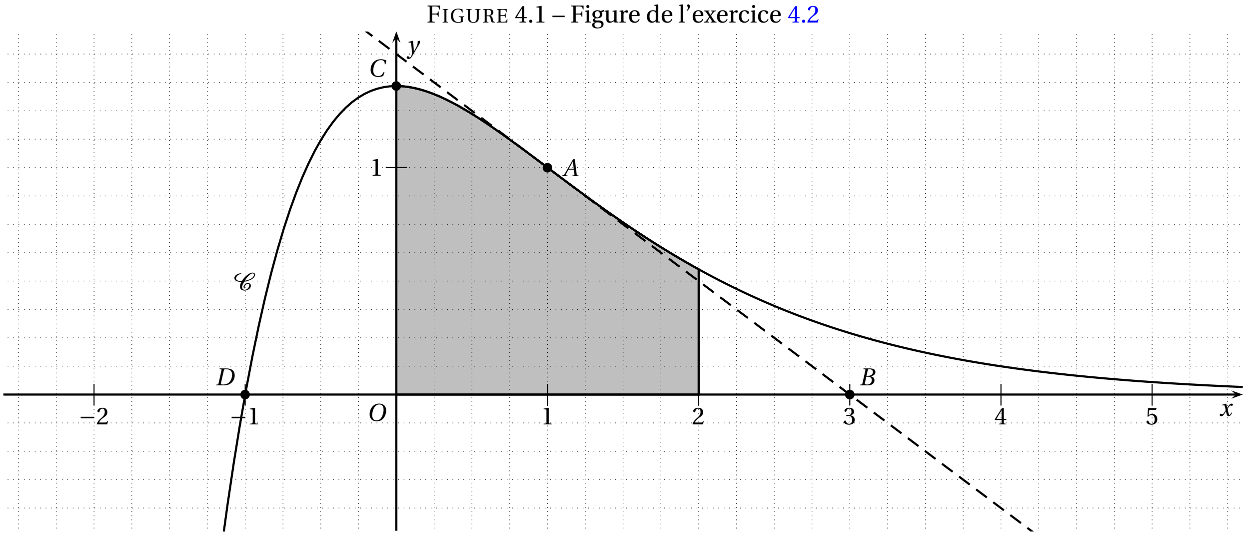
Calcul intégral – Statistiques à deux variables

EXERCICE 4.1 (6 points)**.**
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = -3(2x-1)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ pour $x \in [0\,;+\infty[$
- $h(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

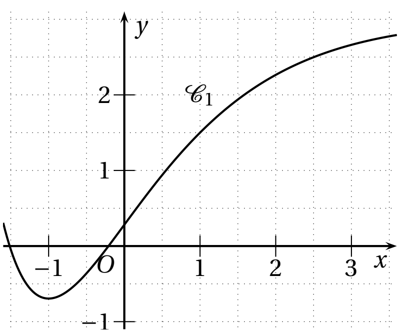
EXERCICE 4.2 (9 points)**.**
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ relativement à un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 3 cm sur l'axe des ordonnées) est donnée sur la figure 4.1 de la présente page.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1\,;1)$ et $D(-1\,;0)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A passe par le point $B(3\,;0)$ et la tangente à la courbe en C, d'abscisse 0, est horizontale. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.
Le domaine grisé $\mathscr{D}$ est délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, par l'axe des ordonnées et par la droite d'équation $x = 2$.

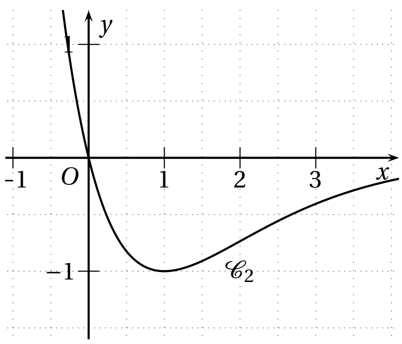
FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.2

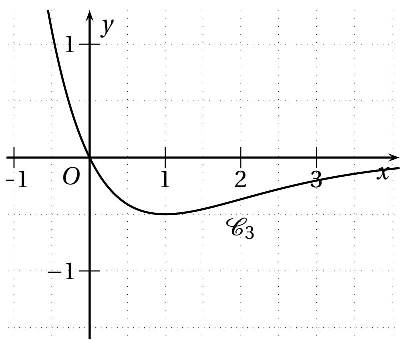


1. Avec les informations fournies par l'énoncé, déterminer, sans justifier $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(0)$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine grisé $\mathscr{D}$. Sans justifier et avec la précision permise par le graphique, déterminer laquelle de ces trois inégalités est correcte :
   - $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$;
   - $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 3$;
   - $3 \leqslant \mathscr{A}$.
3. L'une des trois courbes ci-dessous est celle de f', fonction dérivée de f. Déterminer laquelle en justifiant votre choix.
4. L'une des trois courbes ci-dessous est celle de F, une primitive de f.
   (a) Déterminer laquelle en justifiant votre choix.
   (b) En déduire l'aire du domaine $\mathscr{D}$, en cm^2.
   (c) En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1\,;3]$ et la représenter sur la figure 4.1.
   On rappelle que la valeur moyenne $\overline{f}$ d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ est donnée par la formule :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$







EXERCICE 4.3 (5 points)**.**
Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1 951 à 2 001.

Année	1 951	1 961	1 971	1 981	1 991	2 001
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Population en millions y_i	360	439	548	683	846	1 018

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ dans le repère ci-dessous.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et placer G sur le graphique.
3. On souhaite réaliser un ajustement affine de ce nuage afin de faire des prévisions.
   (a) Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients à* 10^{-2} *près*).
   (b) Déterminer à l'aide de cette équation une prévision pour la population de l'Inde en 2 021, à 1 millions d'habitants près.
   (c) Déterminer à l'aide de cette équation une estimation de l'année où la population de l'Inde dépassera 2 milliards d'habitants.