Devoir surveillé n°2

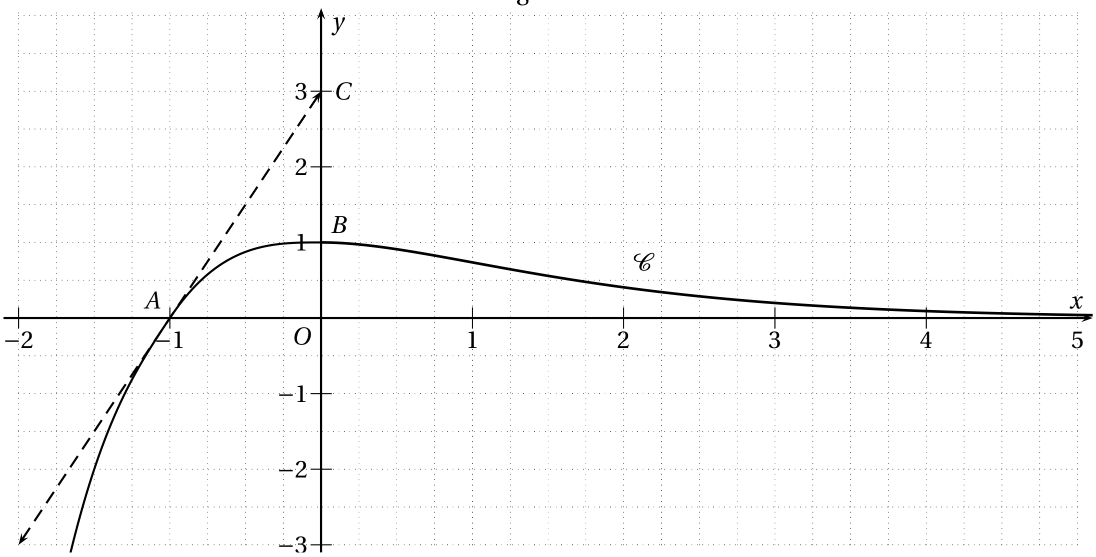
Composition – Limites – Suites

EXERCICE 2.1 (6 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soit une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 2.1 de la présente page représente la fonction u dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points $A(-1\ 0)$ et $B(0;1)$. La tangente à la courbe en A passe par $C(0;3)$.

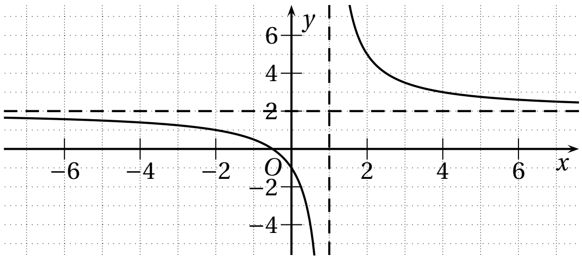
FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



1. Sans justifier :
   (a) Déterminer graphiquement $u'(0)$ et $u'(-1)$.
   (b) Donner le signe de u en fonction de x.
   (c) Donner le signe de u' en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^2$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner l'expression de f', la dérivée de f, en fonction de u et de u'.
   (b) Calculer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
3. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $g = \frac{1}{u}$.
   On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
   (a) Donner l'expression de g', la dérivée de g, en fonction de u et de u'.
   (b) Déterminer les variations de g.

EXERCICE 2.2 (5 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
*Chaque bonne réponse rapporte un point, **chaque réponse incorrecte retire 0,5 point**, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. La courbe de la figure ci-dessous est celle d'une fonction f.



   Graphiquement on peut conjecturer que :

   ❒ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$

2. Soit g une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} g(x) = -\infty$, alors on sait que la courbe de g :

   ❒ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ ❒ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ ❒ n'admet pas d'asymptote

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $h(x) = \frac{-2x+1}{x-3}$, alors :

   ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = +\infty$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = -\infty$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = -2$

4. Soit i une fonction telle que, pour tout $x > 0$, $-\frac{2}{x} < i(x) < \frac{2}{x}$, alors :

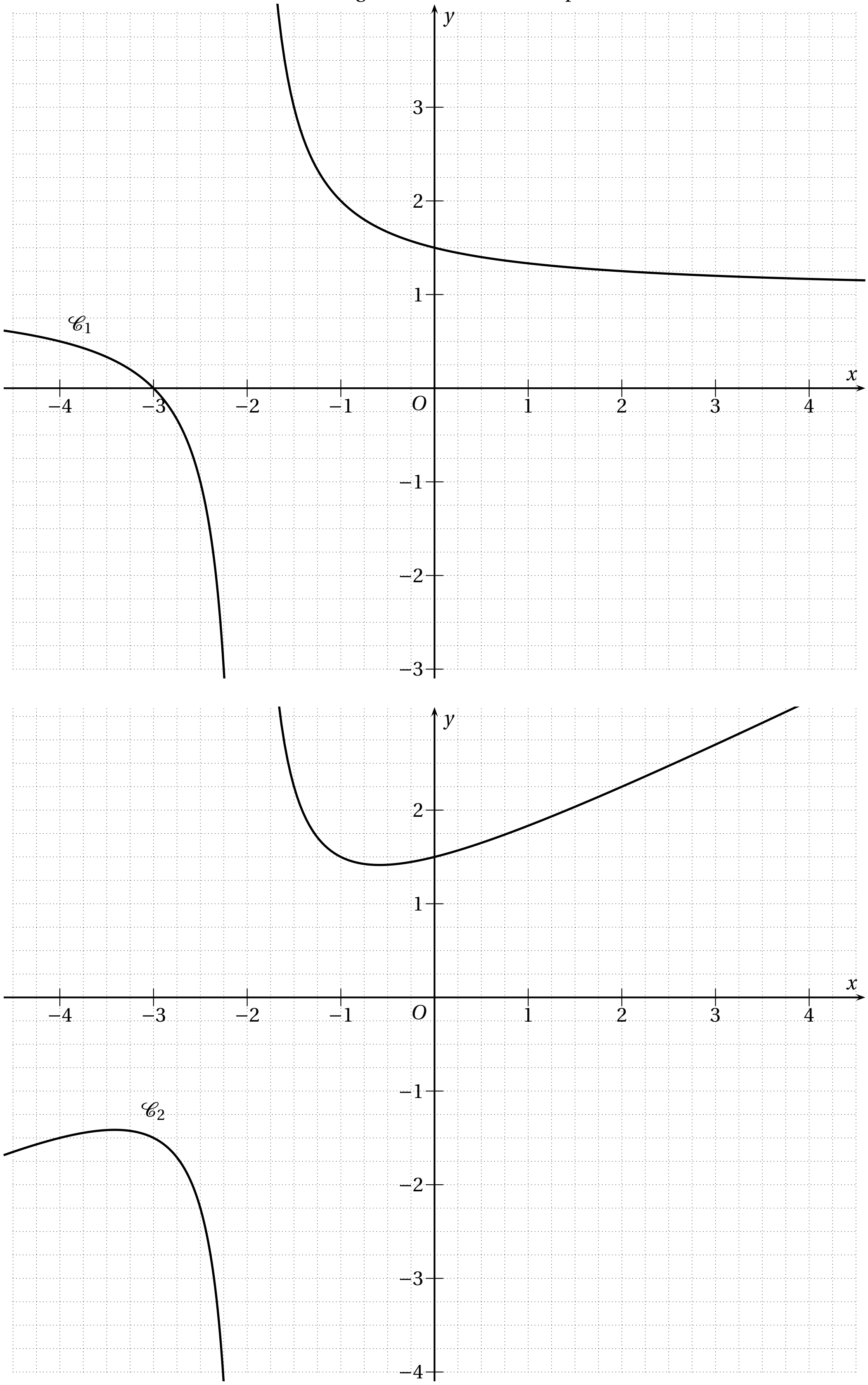
   (a) ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} i(x) = +\infty$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} i(x) = 0$ ❒ on ne peut rien dire pour $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} i(x)$

   (b) ❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$ ❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 0$ ❒ on ne peut rien dire pour $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)$

EXERCICE 2.2 (5 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n+2} \end{cases}$.
   On donne sur la figure 2.2 page ci-contre deux courbes dont l'une d'elles est la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.
   (a) Déterminer quelle est la courbe de f.
   (b) Construire la représentation en chemin de (u_n).
2. La suite (v_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3n+1}{n+2}$.
   (a) Montrer que (v_n) est bornée par 0 et 3.
   (b) Étudier la monotonie de (v_n).
   (c) Étudier la convergence de (v_n).

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.2 (spécialité)



EXERCICE 2.3 (9 points).

*Pour **tous** les élèves.*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{2x+2}$.

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Montrer que $f(x)=0,5x+2-\frac{2}{2x+2}$.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.

   (b) Déterminer les limites de $f(x)-(0,5x+2)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
3. On admet que $f'(x)=\frac{2x^2+4x+6}{(2x+2)^2}$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.
   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.
   En déduire les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître le signe de $f'(x)$ et les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Sur la figure 2.3 de la présente page :

   (a) Tracer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$ trouvées à la question 2.

   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.3