Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Dérivation – Graphes

EXERCICE 1.1 (3 points).

La fonction f est définie sur $[-3\,;2]$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{sur } [-3\,;-1] \\ x^2+bx+2 & \text{sur }]-1\,;2] \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}_b$ sa représentation graphique.

1. Dans le repère de la figure 1.1 page 25 tracer **en bleu** $\mathscr{C}_2$, la représentation graphique de f pour $b=2$.
2. Déterminer b pour que f soit continue sur $[-3\,;2]$. Tracer alors sa représentation **en rouge** dans le même repère.

EXERCICE 1.2 (6 points).

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Calculer $g(-1)$ et $g(0)$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1\,;0]$.
   (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
   (e) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

EXERCICE 1.3 (6 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x-3}$

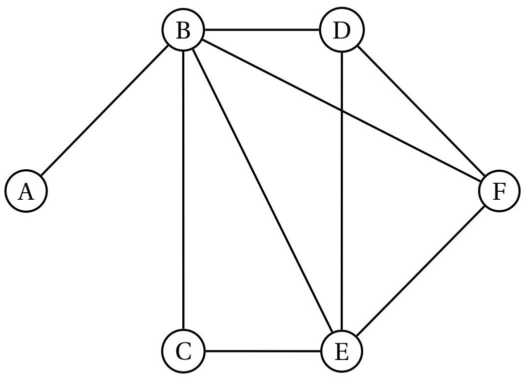
On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau des variations de f en indiquant les extremums locaux.
2. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
3. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Dans le repère de la figure 1.2 page 26 :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 3 ;
   (d) tracer la courbe $\mathscr{C}$

EXERCICE 1.4 (5 points).

Les questions sont indépendantes.

1. La figure ci-contre propose un graphe.
   (a) Citer deux sommets adjacents (*justifier brièvement*).
   (b) Ce graphe est-il complet (*justifier brièvement*) ?
   (c) Ce graphe contient-il un sous-graphe d'ordre 3 qui soit complet ? Et d'ordre 4 ? *Si oui le(les) citer.*
   (d) Ce graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui le citer.*
   (e) Déterminer graphiquement la distance entre chacun des sommets (*on pourra faire un tableau*).
   (f) Déterminer le diamètre de ce graphe.



2. Est-il possible que dans un groupe de six personnes (*on justifiera chaque réponse*) :
   (a) quatre d'entre elles aient 3 amis, une d'entre elles 5 amis et la dernière ait 1 ami ?
   (b) quatre d'entre elles aient 2 amis, une d'entre elles 3 amis et la dernière 4 ami ?
   (c) quatre d'entre elles aient 2 amis, une d'entre elles 4 amis et la dernière 6 amis ?
3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que dans un graphe simple (sans boucle et sans arête parallèle), la somme des degrés des sommets est forcément paire.

Annexes

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.1

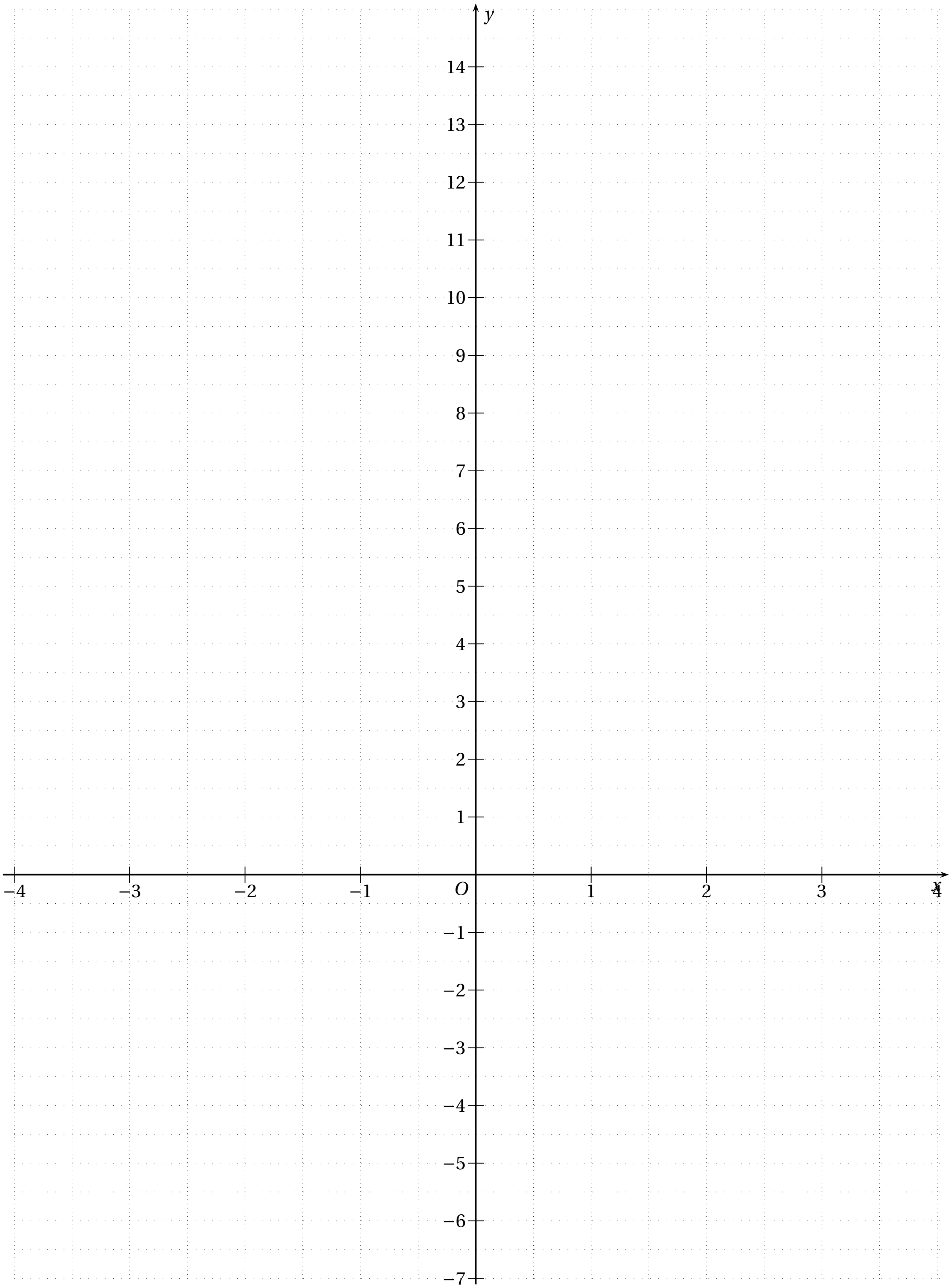


FIGURE 1.2 – Figure de l'exercice 1.3