Devoir maison n°3

Surplus des producteurs – Surplus des consommateurs

Une nouvelle console de jeux est mise sur le marché.
On admet que :
- le prix auquel veulent vendre les fournisseurs
- le prix que sont prêts à payer les consommateurs

dépendent de la quantité de consoles mises sur le marché.
Plus précisément :
- la fonction d'offre des fournisseurs est la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2+100x+400}{1000}$$

où $f(x)$ est le prix que les fournisseurs comptent vendre la console (en centaines d'euros) pour x consoles (en milliers) mises sur le marché ;
- la fonction de demande des consommateurs est la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x)=\ln\left(\frac{200}{x}\right)$$

où $g(x)$ est le prix que sont prêts à payer les consommateurs (en centaines d'euros) pour x consoles (en milliers) mises sur le marché.

Partie A
Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées dans le repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal fourni par la figure 3.1 page suivante.

1. Identifier les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la figure. Expliquez votre choix.
2. (a) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0. Comment interpréter ce résultat ?
   (b) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Comment interpréter ce résultat ?
3. (a) Que représente le point A d'un point de vue économique ? Lire ses coordonnées $\left(x_0\,;y_0\right)$ sur le graphique.
   (b) Pour déterminer les coordonnées de A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.
   On pose, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $h(x)=f(x)-g(x)$.
      i. Exprimer $g(x)$ en fonction de $\ln(x)$.
      ii. Étudier le signe de la dérivée h' et en déduire le sens de variations de h.
      iii. Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[10\,;20]$.
      Déterminer alors la valeur arrondie au millième de x_0 à l'aide de la calculatrice.
      iv. En déduire la quantité de consoles disponibles (à l'unité) lorsqu'on est au prix d'équilibre ainsi que la valeur de ce prix d'équilibre (à l'euro).

Pour la suite on prendra $x_0=17{,}4$ milliers et $y_0=2{,}4$ centaines d'euros.

Partie B : Surplus des consommateurs

Certains individus étaient près à payer plus cher cette console que le prix d'équilibre. Ils réalisent donc une économie. La différence entre le prix qu'ils étaient prêts à payer et le prix payé, c'est-à-dire le prix d'équilibre, représente le surplus du consommateur. Graphiquement, le surplus du consommateur est donc donné par la surface sous la courbe de demande au-dessus du prix d'équilibre (surface grisée).

1. Montrer que la fonction $j(x)=x\ln(x)-x$, définie sur $]0\,;+\infty[$, est une primitive de la fonction logarithme népérien.
2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de G lorsque x tend vers 0.
   Pour la suite, on prendra $G(0)=\lim\limits_{x\to 0}G(x)$.
4. Déterminer la valeur exacte du surplus des consommateurs.
   En quelle unité est cette valeur ? En donner la valeur arrondie à l'euro.

Partie C : Surplus des fournisseurs

Certains fournisseurs étaient près à vendre moins cher cette console que le prix d'équilibre. Ils réalisent donc un bénéfice. La différence entre le prix qu'ils étaient prêts à vendre et le prix vendu, c'est-à-dire le prix d'équilibre représente le surplus des fournisseurs.

1. Déterminer une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. On admet que le surplus des fournisseurs est le nombre $S = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ce nombre représente une aire.
   Représenter cette aire sur la figure 3.1 de la présente page.
   Déterminer la valeur exacte de S en unités d'aire puis sa valeur arrondi à l'euro.

FIGURE 3.1 – Courbes de l'offre et de la demande