

Devoir maison n°1

Élasticité

EXERCICE.

On note p le prix d'un produit en euros et $f(p)$ la demande liée à ce produit pour le prix p .

L'élasticité $E(p)$ de la demande par rapport au prix p est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de p .

La demande $f(p)$ d'un produit proposé à un prix p (en €) est donné par : $f(p) = \frac{10^5 \times p}{p^2 - 100}$ avec $p \in [11; +\infty[$

Partie A : Étude de la demande

1. Calculer la demande pour $p = 11$, $p = 15$ et $p = 90$.

$$f(11) \approx 52380,95 \text{ €}. \quad f(15) = 12000 \text{ €}. \quad f(90) = 1125 \text{ €}.$$

2. (a) Vérifier que $f(p) > 0$ pour tout $p \geq 11$.

Comme $p \in [11; +\infty[$, $10^5 \times p > 0$.

$p^2 - 100 = (p + 10)(p - 10)$ est un trinôme positif sauf entre les racines (-10 et 10), donc positif sur $[11; +\infty[$. Donc $f(p) > 0$.

- (b) Montrer que f est décroissante sur $[11; +\infty[$

Étudions le signe de f' , dérivée de f .

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{10^5 \times (p^2 - 100) - 10^5 \times p \times 2p}{(p^2 - 100)^2} = \frac{10^5(p^2 - 100 - 2p^2)}{(p^2 - 100)^2} \\ &= \frac{-10^5(p^2 + 100)}{(p^2 - 100)^2} \end{aligned}$$

-10^5 négatif; $p^2 + 100$ positif; $(p^2 - 100)^2$ positif. Donc $f'(p)$ négatif pour tout p .
 f est donc décroissante sur $[11; +\infty[$.

3. On suppose que le prix p , initialement égal à 15 €, subit une augmentation de 1 %.

- (a) Calculer le nouveau prix p_1 , ainsi que la demande correspondant à ce prix, arrondie à l'unité.

$$p_1 = p \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 15,15 \text{ €}. \quad f(15,15) \approx 11697.$$

- (b) En déduire $E(15)$, l'élasticité de la demande par rapport au prix de 15 €.

Quand le prix augmente de 1 %, la demande varie de $\frac{11697 - 12000}{12000} \approx -0,025 = -2,5 \%$. Donc $E(15) = -2,5$.

Partie B : Étude de l'élasticité de la demande.

En économie, on considère qu'une bonne approximation de $E(p)$ est donné par $p \times \frac{f'(p)}{f(p)}$ et on écrit même $E(p) = p \times \frac{f'(p)}{f(p)}$.

1. (a) Quel est le signe de $E(p)$ pour $p \geq 11$?

Pour $p \geq 11$: p positif; $f'(p)$ négatif; $f(p)$ positif.
Donc $E(p)$ est négatif pour $p \geq 11$.

- (b) Établir que $E(p) = 1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100}$

$$\begin{aligned} E(p) &= p \times \frac{f'(p)}{f(p)} = p \times \frac{\frac{-10^5(p^2 + 100)}{(p^2 - 100)^2}}{\frac{10^5 \times p}{p^2 - 100}} \\ &= p \times \frac{-10^5(p^2 + 100)}{(p^2 - 100)^2} \times \frac{p^2 - 100}{10^5 \times p} \\ &= -\frac{p^2 + 100}{p^2 - 100} \end{aligned}$$

$$\text{Or } 1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100} = \frac{p^2 - 100 - 2p^2}{p^2 - 100} = -\frac{p^2 + 100}{p^2 - 100}.$$

$$\text{Donc } E(p) = 1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100}.$$

2. (a) Étudier la limite suivante de $E(p)$ en $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow +\infty} E(p) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2p^2}{p^2} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{1} \right) \\ &= -1\end{aligned}$$

Cela peut s'interpréter de la manière suivante : « Quand le prix est très grand, une augmentation de prix de 1 % entraîne une baisse de la demande de 1 % ».

- (b) Calculer $E'(p)$, où E' est la fonction dérivée de E , et en déduire le tableau de variation de E .

$$\begin{aligned}E'(p) &= 0 - \frac{4p(p^2 - 100) - 2p^2(2p)}{(p^2 - 100)^2} \\ &= -\frac{4p^3 - 400p - 4p^3}{(p^2 - 100)^2} \\ &= \frac{400p}{(p^2 - 100)^2}\end{aligned}$$

Pour $p \geq 11$: $400p$ positif ; $(p^2 - 100)^2$ positif.
Donc $E'(p)$ positif.

p	11	$+\infty$
$E'(p)$	+	
E	-10,52	-1

- (c) Calculer la valeur p_0 pour laquelle l'élasticité est de $-1,25$.

$$\begin{aligned}E(p) = -1,25 &\Leftrightarrow 1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100} = -1,25 \\ \Leftrightarrow 2,25 &= \frac{2p^2}{p^2 - 100} \\ \Leftrightarrow 2,25p^2 - 225 &= 2p^2 \\ \Leftrightarrow 0,25p^2 &= 225 \\ \Leftrightarrow p^2 &= 900 \\ \Leftrightarrow p &= 30 \text{ ou } p = -30\end{aligned}$$

Mais $p \geq 11$, donc $p_0 = 30 \text{ €}$.

- (d) Comment évolue la demande quand le prix passe de 30 € à $30,30 \text{ €}$?

C'est une augmentation de 1 %, on cherche donc l'élasticité pour 30 € , mais on sait que pour 30 € l'élasticité est de $-1,25$.

Donc quand le prix passe de 30 € à $30,30 \text{ €}$, la demande diminue de 1,25 %.