Chapitre 6

Lois de probabilité

Sommaire

6.1 Activité **93**
- 6.1.1 Situation A 93
- 6.1.2 Situation B 93
- 6.1.3 Situation C 94

6.2 Loi de probabilité numérique (rappel de Première) **94**

6.3 Loi binomiale **95**

6.4 Avec remise, sans remise **95**

6.5 Exercices **96**
- 6.5.1 Loi numérique 96
- 6.5.2 Loi binomiale 97
- 6.5.3 Annales 98

6.1 Activité

Une roue dans une fête foraine est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue. On tourne la roue et celle-ci s'arrête de façon équiprobable sur l'un des 8 secteurs.

6.1.1 Situation A

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Donner, pour chacune de ces issues ω_i de cet univers, sa probabilité.
   On présentera ces résultats sous forme de tableau du type :

ω_i	$\ldots$
$p(\omega_i)$	$\ldots$

On décrit ainsi la loi de probabilité p sur l'univers Ω.

Remarque. (rappel) Quand il n'y a pas de risque de confusion on peut noter $p(\omega_i)$ au lieu de $p(\{\omega_i\})$

6.1.2 Situation B

Le jeu se déroule en fait de la manière suivante : si un joueur désire jouer, il doit miser 1 € et il gagne une somme dépendant de la couleur obtenue :
- aucun euro si la roue s'arrête sur un secteur bleu ;
- un euro si la roue s'arrête sur un secteur vert ;
- trois euros si la roue s'arrête sur le secteur rouge.

On s'intéresse pour la suite uniquement au gain final obtenu par le joueur, c'est-à-dire le gain associé à la couleur moins la mise pour pouvoir jouer.

1. Décrire l'univers Ω' de cette nouvelle expérience aléatoire.
2. Décrire la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire (*on donnera le résultat sous forme de tableau*).
3. Si le joueur joue un grand nombre de fois à ce jeu, par exemple 10 000 fois :

(a) quel effectif pour chacun des gains peut-on espérer ?

(b) quel fréquence pour chacun des gains peut-on espérer ?

(c) quel gain total peut-on espérer sur les 10 000 parties ?

(d) quelle moyenne par partie peut-on espérer ?
Vérifier que cette moyenne est égale à $\sum p_i\omega_i = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \ldots + p_n\omega_n$ où les ω_i sont les différents gains possibles et les p_i les probabilités respectives des événements $\{\omega_i\}$.

Cette « moyenne » sera appelée espérance *de la loi de probabilité.*

6.1.3 Situation C

On s'intéresse maintenant uniquement à deux aspects d'une partie :
- S : le joueur obtient un succès à la partie, c'est-à-dire qu'il repart avec une somme d'argent strictement supérieure à celle avec laquelle il est arrivé ;
- $\overline{S}$: le joueur obtient un échec à la partie, c'est-à-dire qu'il repart avec une somme d'argent inférieure ou égale à celle avec laquelle il est arrivé.

1. Situation C_1 : Le joueur joue une seule partie. Déterminer la probabilité de chaque issue possible.
2. Situation C_2 : Le joueur joue trois parties à suivre. On note X le nombre de succès.
   (a) Décrire, à l'aide d'un arbre, cette expérience aléatoire.
   (b) Quelles sont les valeurs k possibles pour X et les probabilités de chacun des événements $\{X = k\}$?
   On présentera ces résultats sous forme de tableau du type :

k	$\ldots$
$p(X = k)$	$\ldots$

   (c) Calculer l'espérance de cette loi. Comment peut-on l'interpréter ?
3. Situation C_3 : Le joueur joue huit parties consécutives. On note X le nombre de succès.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   (b) Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   - A : Le joueur ne gagne aucune fois
   - B : Le joueur gagne à chaque fois
   - C : Le joueur gagne exactement une fois
   - D : Le joueur gagne au moins une fois
   - E : Le joueur gagne au plus sept fois

   (c) On admettra que l'espérance de cette loi de probabilité est 1. Comment l'interpréter ?

6.2 Loi de probabilité numérique (rappel de Première)

Remarque. En ES, on déterminera systématiquement les lois de probabilité à l'aide d'un arbre.

Définition 6.1. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité.
Si, pour tout i, ω_i est un réel alors la loi de probabilité est dite *numérique*.

Exemple 6.1. Dans l'activité, seule la loi de probabilité de la situation A n'est pas numérique, car les issues de cette expérience sont des couleurs. Dans tous les autres cas, la loi est numérique car les issues sont des réels.

Définition 6.2. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité qui est numérique.
On définit alors l'espérance mathématique, E, la variance, V, et l'écart type σ, de la loi de probabilité numérique de la façon suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i \qquad V = \sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i - E)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^2\right) - E^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

où ω_i sont les éventualités et p_i les probabilités respectives des $\{\omega_i\}$.

6.3 Loi binomiale

Définition 6.3 (Épreuve de BERNOULLI)**.** On appelle *épreuve de* BERNOULLI toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle parfois, pour l'une, *succès* et, pour l'autre, *échec*.

Exemple 6.2. La situation C_1 de l'activité est une épreuve de BERNOULLI.

Définition 6.4 (Schéma de BERNOULLI)**.** On appelle *schéma de* BERNOULLI la répétition de la même épreuve de BERNOULLI les épreuves successives étant supposées 2 à 2 indépendantes.

Exemple 6.3. Les situations C_2 et C_3 de l'activité sont des schémas de BERNOULLI.

Définition 6.5 (Loi binomiale)**.** Considérons un schéma de BERNOULLI consistant en la repétition de n épreuves de BERNOULLI identiques et 2 à 2 indépendantes et notons p la probabilité d'un succès lors de chaque épreuve.
Soit X le nombre de succès et P la probabilité associée.
On dit que la probabilité P suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, généralement notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemple 6.4. Les probabilités issues des situations C_2 et C_3 de l'activité suivent des lois binomiales de paramètres respectifs $p = \frac{1}{8}$ et $n = 3$ et $p = \frac{1}{8}$ et $n = 8$.

On admettra la propriété suivante :

Propriété 6.1. *Soit une loi binomiale de paramètres p et n, avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0\,;\,1]$. *Alors :*

$$E = np \qquad V = np(1-p) \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

EXERCICE.
Déterminer les espérances, variances et écarts-types des lois de probabilité issues des situations C_2 et C_3 de l'activité.

6.4 Avec remise, sans remise

EXERCICE.
Une urne contient des boules blanches et noires indiscernables au toucher. On appelle B l'événement « la boule tirée est blanche » et N l'événement « la boule tirée est noire ».

1. L'urne contient deux boules blanches et une noire.
   (a) Déterminer $p(B)$ et $p(N)$
   (b) On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (c) On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (d) Comparer les deux lois précédentes.
2. L'urne contient 200 boules blanches et 100 noires.
   (a) Déterminer $p(B)$ et $p(N)$
   (b) On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (c) On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (d) Comparer les deux lois précédentes.
3. Que peut-on en conclure ?

6.5 Exercices

6.5.1 Loi numérique

Exercice 6.1.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note la différence (en valeur absolue) entre ces deux dés.

1. Définir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette expérience aléatoire.

Exercice 6.2.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :
- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

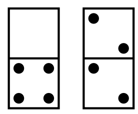
La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X le gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers Ω associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ €.
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ €.
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 6.3 (La Réunion juin 2 007)**.**
Un domino est une petite plaque partagée en deux parties. Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.



Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :
- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

Exercice 6.4 (D'après Liban juin 2 007)**.**
Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle V l'événement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection ».
On donne : la probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à $0,345$.

1. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?
2. À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

   (a) Déterminer q.

(b) En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 6.5 (Polynésie septembre 2 006)**.**
On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. (a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?
   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?
   (b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.
   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.
2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.
   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.
   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.
   (a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.
   (b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.

6.5.2 Loi binomiale

EXERCICE 6.6.
On jette trois fois de suite, de manière totalement indépendante une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on appelle « tirage » le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X le nombre de « Pile »obtenues à chaque tirage.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer E, V et σ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de cette loi.

EXERCICE 6.7.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} *près.*
Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « L'élève choisi fume », et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement : « L'élève choisi est une fille ».
   Quelle est la probabilité que :
   (a) Cet élève soit un garçon ?
   (b) Cet élève soit une fille qui fume ?
   (c) Cet élève soit un garçon qui fume ?
2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.
3. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise. À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur.

EXERCICE 6.8.
Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2. Dans chaque livraison figurent 20 % de câbles C_1 et 80 % de câbles C_2.
On prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1. On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.
   (b) Calculer la probabilité d'obetnir au moins un câble de type C_1.
   (c) Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Dans cette question n est inconnu.
   (a) Exprimer $p(X \geqslant 1)$ en fonction de n.
   (b) Combien de fois faut-il réalise l'expérience pour être sûr à 90 % d'obtenir au moins un câble C_1 ?

EXERCICE 6.9 (D'après Centres étrangers – Juin 2 007)**.**
On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.

1. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près.*
2. Combien de jours dans le mois de septembre, l'employeur de Monsieur X peut-il espérer le voir arriver à l'heure ?

EXERCICE 6.10 (Amérique du sud – Novembre 2 005)**.**
Lors d'un examen, Julien doit répondre à un Q.C.M.
À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.
On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$.
On note :

- C l'évènement « Julien connaît la réponse »,
- E l'évènement « la réponse est exacte ».

1. (a) Julien répond à une question du Q.C.M. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   (b) Démontrer que : $p(\mathrm{E}) = \frac{2}{3}$.
   (c) Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.
2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien à ce Q.C.M.«
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
   (b) Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point à ce Q.C.M. ?
   (c) En supposant que tous les élèves se comportent comme Julien, quelle moyenne, arrondie au centième, peut-on attendre à ce Q.C.M. ?

6.5.3 Annales

EXERCICE 6.11 (France métropolitaine – Juin 2 002)**.**
Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle. À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :
A « La personne a une activité professionnelle » ;
B « La personne poursuit ses études » ;
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».
On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles. Dans l'ensemble des réponses reçues, en a relevé les résultats suivants :
* 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
* 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.
   (a) Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0, 18.

(b) Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire)?
3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

   À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.
4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leqslant S < 22$	$22 \leqslant S < 26$	$26 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 34$	$34 \leqslant S < 38$	$38 \leqslant S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

   Quel est le salaire brut annuel moyen?

EXERCICE 6.12 (Polynésie – Juin 2 006)**.**
Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons. Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe. En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.
On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.
On note :

- A l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
- T l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
- D l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
- V l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

1. Déterminer : $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{T})$, $p(\mathrm{V})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})$ et $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{V})$.
2. (a) Determiner la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.

   (b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

   (c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.
4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante. On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

   (a) Prouver que : $p_n = 1 - 0,4^n$.

   (b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$.