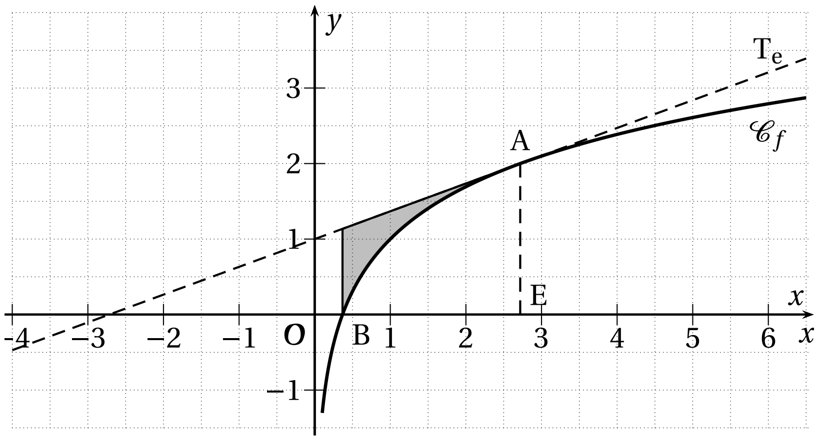
Devoir surveillé n° 8

Calcul intégral – Lois de probabilité à densité

EXERCICE 8.1 (7 points)**.**
On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A(e ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
Le point E a pour coordonnées (e ; 0).
On admettra que sur $]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.



1. Démontrer que, pour $x \geqslant \frac{1}{e}$, $f(x) \geqslant 0$.
2. Montrer T_e admet comme équation $y = \frac{1}{e}x + 1$.
3. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.

   (a) Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

   (b) On pose :
   $$I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} (1 + \ln x)\,dx$$
   Déduire de ce qui précède la valeur exacte de I. Interpréter ce nombre.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T_e et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.

EXERCICE 8.2 (5 points)**.**

1. Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_0^2 e^{0,5x}\,dx$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = \frac{e^{0,5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[0\,;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f.
   La probabilité $p(X \geqslant 1,2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

EXERCICE 8.3 (8 points).

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\,; 120]$.
   (a) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en moins de 45 secondes.
   (b) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis entre 60 secondes et 90 secondes.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120,\ 400)$.
   (a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.
   (b) Déterminer les probabilités suivantes à $0,01$ près et interpréter les résultats en termes de partie :
   - $p\,(80 \leqslant X \leqslant 160)$;
   - $p\,(X \geqslant 160)$;
   - $p\,(90 \leqslant X \leqslant 180)$.

   (c) Paul commence une partie à 18 h 15 min mais il devra aller manger à 19 h. Quelle est la probabilité, à $0,01$ près, qu'il soit à l'heure pour le repas.
   (d) *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Paul joue essentiellement en fin d'après-midi ou en soirée et, si la partie dure plus de 3 h, la probabilité que Paul soit en retard à son lycée le lendemain est de 0,5, alors que si la partie dure moins de 3 h, la probabilité que Paul soit en retard au lycée le lendemain n'est que de 0,1.
   Déterminer, à $0,01$ près, la probabilité que Paul soit en retard au lycée le lendemain.