Devoir surveillé nº 7

Calcul intégral

EXERCICE 7.1 (5 points)**.**
Les questions sont indépendantes.

Toutes les fonctions de cet exercice sont continues sur l'ensemble sur lequel elles sont définies.

1. Pour chacune des fonctions f suivantes déterminer F, une primitive de f :
   (a) $f(x) = 2x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$
   (b) $f(x) = 3x^2 + x + 1$ définie $\mathbb{R}$
   (c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ définie sur $]0\,;+\infty[$
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.
   Déterminer l'expression G de toutes les primitives de g.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$.
   Déterminer la primitive H de h qui s'annule en 0.

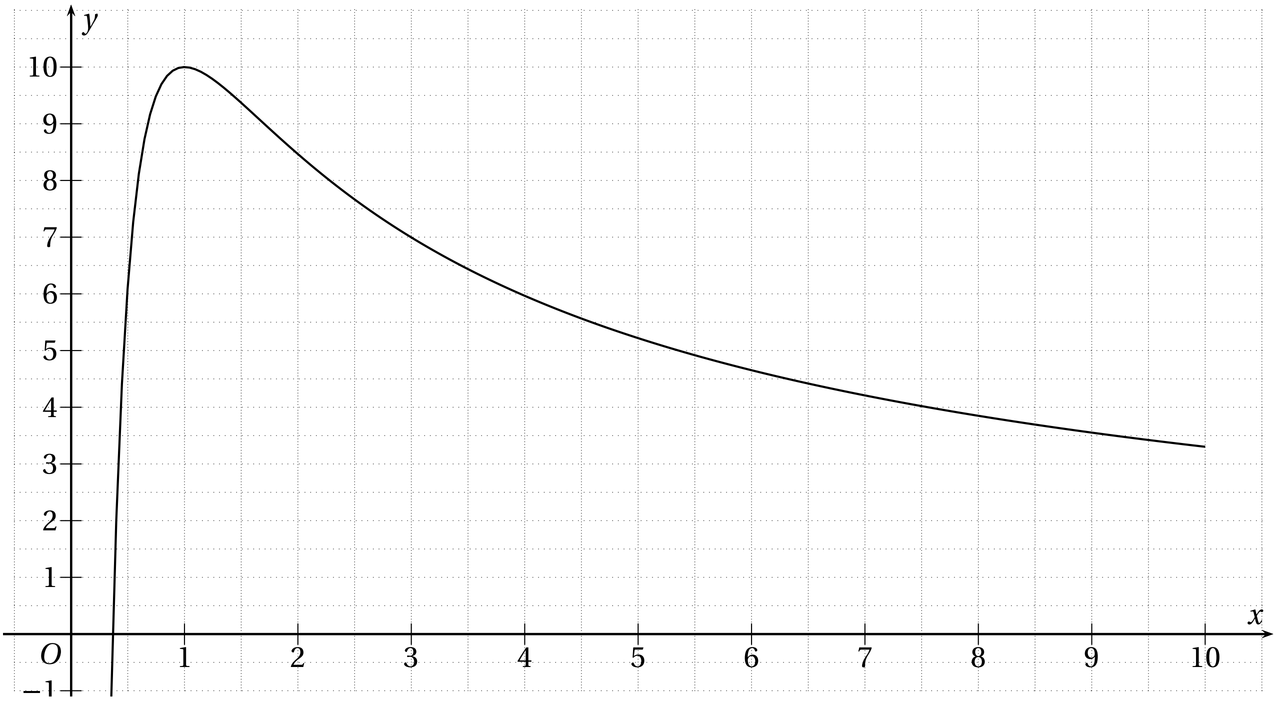
EXERCICE 7.2 (7,5 points)**.**
On considère une fonction f, définie, continue et doublement dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa dérivée.
La courbe Γ tracée sur la figure 7.1 donnée en annexe page 125 représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que 1 unité = 1.5 cm sur l'axe des abscisses et 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.
On note e le nombre réel tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
La courbe Γ passe par les points A, B et C.
La tangente à la courbe au point A passe par le point D.
La tangente à la courbe au point B est parallèle à l'axe des abscisses.
Les coordonnées des points A, B, C et D sont des nombres entiers, exceptée l'ordonnée de B qui vaut e^2.

1. Donner sans justifier $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$, $f'(3)$.
   Les valeurs exactes sont attendues.
2. Donner sans justifier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3. Conjecturer la convexité de f selon les valeurs de x.
4. Avec la précision permise par le graphique, déterminer un encadrement d'amplitude minimale de la quantité $I = \displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Aucune explication n'est attendue mais on laissera sur le graphique les traits de construction ayant permis d'obtenir cet encadrement.
5. La figure 7.2 donnée en annexe page 125 propose quatre répresentations graphiques.
   (a) Une de ces représentations graphiques représente la fonction dérivée f' et une autre la dérivée seconde f'' de f.
   Déterminer lesquelles en justifiant vos choix à l'aide d'arguments graphiques.
   (b) Une de ces représentations graphiques représente une primitive F de f.
      i. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
      ii. À l'aide de cette représentation, donner une valeur approchée de I, défini dans la question 4, en cm^2.

EXERCICE 7.3 (7,5 points)**.**
Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimée en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$ par :

$$B(x) = 10 \times \frac{1+\ln x}{x}$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.
On donne ci-dessous la courbe représentative de B.



1. (a) Résoudre l'inéquation $B(x) \geqslant 0$.
   (b) En déduire le nombre d'objets, à l'unité près, que l'entreprise doit fabriquer pour que son résultat mensuel soit un bénéfice.
2. Soit B' la fonction dérivée de B.
   (a) Montrer que $B'(x) = 10 \times \frac{\ln x}{x^2}$ sur $[0,1\,;\,10]$.
   (b) Étudier les variations de B.
   (c) En déduire le bénéfice mensuel maximal et la perte mensuelle maximale, arrondis à l'euro, et pour quel nombre d'objets ils sont atteints.
3. (a) Démontrer qu'une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$ est la fonction F définie sur $[0,1\,;\,10]$ par :
   $$F(x) = 5\ln(x)(\ln x + 2)$$
   (b) Montrer que $F(0,1) = 5\left((\ln 10)^2 - 2\ln 10\right)$.
   (c) On note μ la valeur moyenne de $B(x)$ sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$.
      i. Déterminer la valeur exacte de μ puis en donner une valeur approchée au millième.
      ii. Représenter μ dans le repère ci-dessus.
      iii. Interpréter cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.

FIGURE 7.1: Courbe Γ de l'exercice 7.2

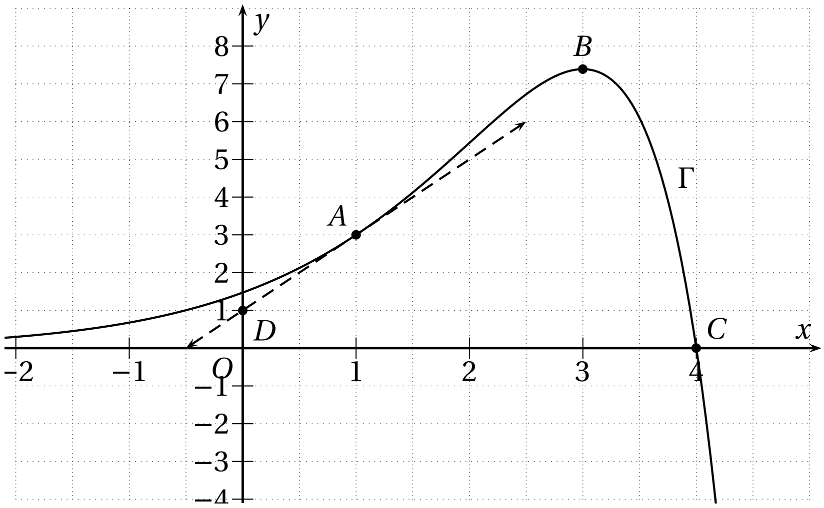


FIGURE 7.2: Courbes de la question 5 de l'exercice 7.2