Devoir surveillé n° 4 – Sujet de rattrapage

Fonction exponentielle – Probabilités conditionnelles

EXERCICE 4.1 (7 points).
Pierre pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Pierre va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Pierre va courir aujourd'hui.
On considère les événements suivants :

A : « Pierre choisit le parcours A »

B : « Pierre choisit le parcours B »

C : « Pierre choisit le parcours C »

E : « Pierre fait une séance d'endurance »

V : « Pierre fait une séance de vitesse »

On sait que :

- Pierre choisit le parcours A dans 30 % des cas et le parcours B dans 20 % des cas ;
- si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;
- si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 80 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.
2. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance de vitesse.
3. On sait que Pierre fait une séance d'endurance dans 70 % des cas.
   Montrer que : $p(E \cap C) = 0,42$.
4. On sait que Pierre a choisi le parcours C.
   Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?
5. Pierre a fait 12 entraînements ce mois-ci.
   Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que les trois-quarts d'entre eux aient été consacrés à l'endurance ?

EXERCICE 4.2 (3 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x on a :
   (a) $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ (b) $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$ (c) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$
2. La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est
   (a) $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$ (b) $-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$ (c) $0,303$
3. Une des trois courbes de la figure 4.1, donnée en annexe, est la représentation graphique d'une fonction g telle que $g' = f$. Laquelle ?

EXERCICE 4.3 (4 points).
Les questions sont indépendantes. Les réponses seront arrondies au centième.

1. Le cours d'une action a baissé de 30 % entre le 1er janvier et le 1er septembre. Déterminer la baisse mensuelle moyenne.
2. Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 7 % pendant 5 ans. À quel taux annuel faudrait-il le placer pour qu'il rapporte la même somme en 10 ans et demi ?

EXERCICE 4.4 (16 points).
Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;3,6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$; il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique
On a représenté sur la figure 4.2, donnée en annexe, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ? Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?
3. Dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour la courbe soit concave ? Quelle en est l'interprétation économique ?

Partie B : étude théorique
Le bénéfice hebdomadaire, noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros, vaut $B(x) = -5 + (4-x)\mathrm{e}^x$.

1. (a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;3,6]$, on a $B'(x) = (3-x)\mathrm{e}^x$.
   (b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera, arrondies au centième, les extremums de la fonction B.
2. (a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\,;3]$, l'autre dans l'intervalle $[3\,;3,6]$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi à 0,01 près de chacune des deux solutions.
3. (a) Étudier la convexité de la courbe de B et montrer qu'elle admet un point d'inflexion J dont on déterminera l'abscisse x_0.
   (b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de B au point d'abscisse x_0 (on arrondira les coefficients au dixiéme) et tracer cette tangente sur la figure.

FIGURE 4.1: Courbes de l'exercice 4.2

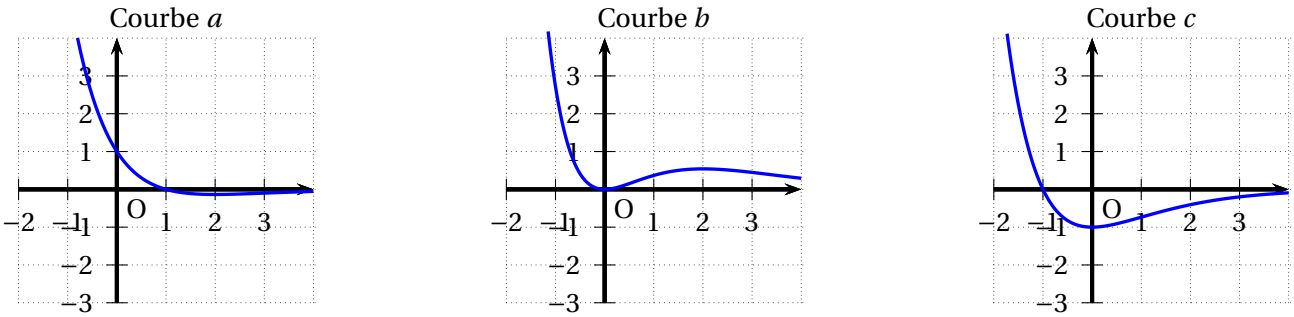
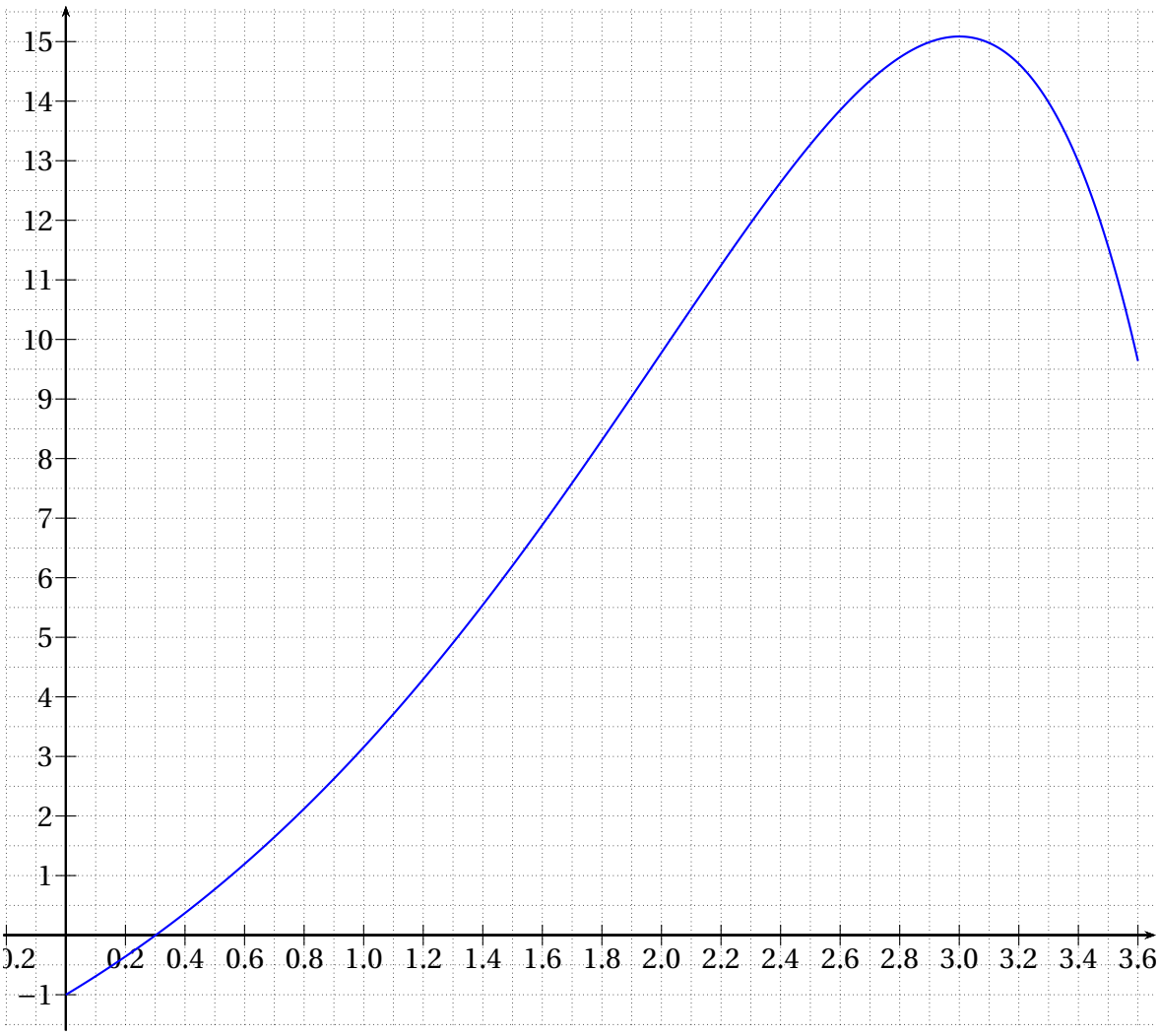
FIGURE 4.2: Figure de l'exercice 4.4