

Devoir surveillé n° 4

Fonction exponentielle – Probabilités conditionnelles

EXERCICE 4.1 (7 points).

Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produit, le rayon informatique propose une extension de garantie.

Dans cet exercice, on suppose que chaque acheteur achète un unique produit entre tablette, ordinateur portable, ordinateur fixe, et qu'il peut souscrire ou non une extension de garantie.

On choisit au hasard un de ces acheteurs.

On sait que :

On considère les événements suivants :

T : « l'acheteur a choisi une tablette »

P : « l'acheteur a choisi un ordinateur portable »

F : « l'acheteur a choisi un ordinateur fixe »

G : « l'acheteur a souscrit une extension de garantie »

On note aussi \bar{T} , \bar{P} , \bar{F} et \bar{G} les événements contraires.

- Le responsable constate que 28 % des acheteurs ont opté pour une tablette et 48 % pour un ordinateur portable ;
- Parmi les acheteurs ayant acquis une tablette, 5 % ont souscrit une extension de garantie et, parmi ceux ayant acquis un ordinateur portable, 25 % ont souscrit une extension de garantie.

1. Construire un arbre pondéré en indiquant les données de l'énoncé.
2. Déterminer la probabilité qu'un acheteur ait choisi une tablette et souscrit à l'extension de garantie.
3. On sait de plus que 16,4 % des acheteurs souscrivent à une extension de garantie. Montrer que $p(F \cap G) = 0,03$.
4. On sait qu'un acheteur a choisi un ordinateur fixe. Quelle est la probabilité qu'il souscrive à une extension de garantie ?
5. Le magasin a eu 10 acheteurs ce jour. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la moitié de ces acheteurs aient souscrit à une extension de garantie ?

EXERCICE 4.2 (3 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = xe^{-x}$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Pour tout réel x on a :

| | | |
|----------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $f'(x) = e^{-x}$ | (b) $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ | (c) $f'(x) = (1 + x)e^{-x}$ |
|----------------------|-----------------------------|-----------------------------|
2. La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est

| | | |
|----------------------------|---------------------------|-----------|
| (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{e}$ | (b) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ | (c) 0,303 |
|----------------------------|---------------------------|-----------|
3. Une des trois courbes de la figure 4.1, donnée en annexe, est la représentation graphique d'une fonction g telle que $g' = f$. Laquelle ?

EXERCICE 4.3 (4 points).

Les questions sont indépendantes. Les réponses seront arrondies au centième.

1. Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 5 % pendant 10 ans. À quel taux annuel faudrait-il le placer pour qu'il rapporte la même somme en 5 ans et demi ?
2. Le cours d'une action a baissé de 25 % entre le 1^{er} janvier et le 1^{er} juin. Déterminer la baisse mensuelle moyenne.

EXERCICE 4.4 (16 points).

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine (x varie donc dans l'intervalle $[0; 3,6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$; il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté sur la figure 4.2, donnée en annexe, la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ? Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?
3. Dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour la courbe soit concave ? Quelle en est l'interprétation économique ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire, noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros, vaut $B(x) = -5 + (4 - x)e^x$.

1. (a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B .
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0; 3,6]$, on a $B'(x) = (3 - x)e^x$.
(b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .
(c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I . On indiquera, arrondies au centième, les extremums de la fonction B .
2. (a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0; 3]$, l'autre dans l'intervalle $[3; 3,6]$.
(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi à 0,01 près de chacune des deux solutions.
3. (a) Étudier la convexité de la courbe de B et montrer qu'elle admet un point d'inflexion J dont on déterminera l'abscisse x_0 .
(b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de B au point d'abscisse x_0 (on arrondira les coefficients au dixième) et tracer cette tangente sur la figure.

FIGURE 4.1: Courbes de l'exercice 4.2

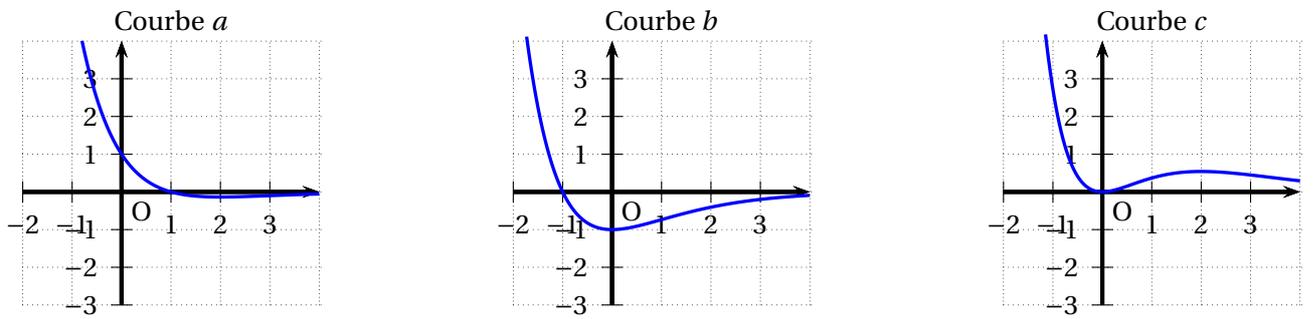


FIGURE 4.2: Figure de l'exercice 4.4

