Devoir maison n°2

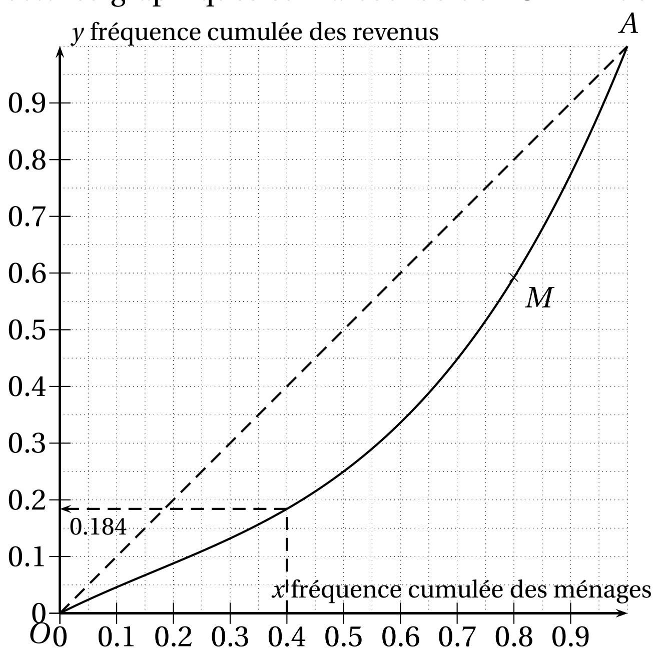
Courbe de LORENZ et indice de GINI

Partie A : Courbe de LORENZ

D'après Wikipédia, la courbe de LORENZ a été développée (par MAX O. LORENZ) comme une représentation graphique des inégalités de revenu. Elle peut aussi servir à mesurer les inégalités de répartition d'un actif ou de toute autre distribution de richesse.

La courbe de LORENZ est la représentation graphique de la fonction qui à la part x des ménages les moins riches associe la part y du revenu total qu'ils perçoivent. La part des ménages, classés par ordre de revenu individuel croissant, est donc en abscisse, et la part du revenu reçu en ordonnée.

1. Lectures graphiques sur la courbe de LORENZ donnée en exemple sur la figure ci-dessous.

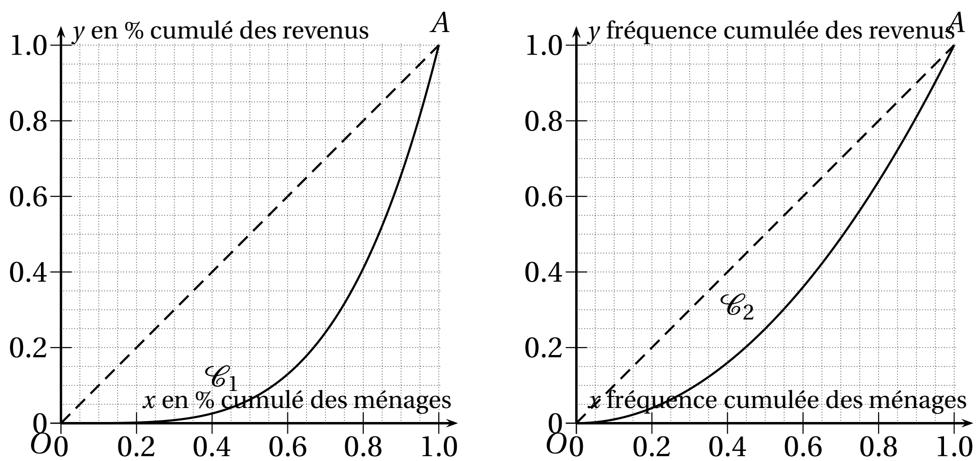


Exemple de lecture : les 0,4=40 % des ménages les moins riches se partagent 0,184=18,4 % du total des revenus des ménages.

   (a) Le point M est de coordonnées $(0,80\,;0,592)$. Interpréter ce point.

   (b) Avec la précision permise par le graphique, indiquer :
   - quel pourcentage du total des revenus revient aux 50 % les moins riches ;
   - quel pourcentage du total des revenus revient aux 20 % les plus riches ;

2. (a) On propose sur la figure ci-dessous deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de Lorenz associées à deux pays $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Dans lequel de ces deux pays la répartition des revenus est-elle la moins inégale ?



   (b) On suppose que tous les ménages d'un pays ont exactement la même part du total des revenus. On parle alors d'égalité parfaite.
   Expliquer pourquoi la courbe de LORENZ est alors confondue avec le segment $[OA]$.

(c) On suppose qu'une seule personne possède la totalité des revenus. On parle alors d'inégalité totale.
Que devient dans ce cas la courbe de LORENZ ?

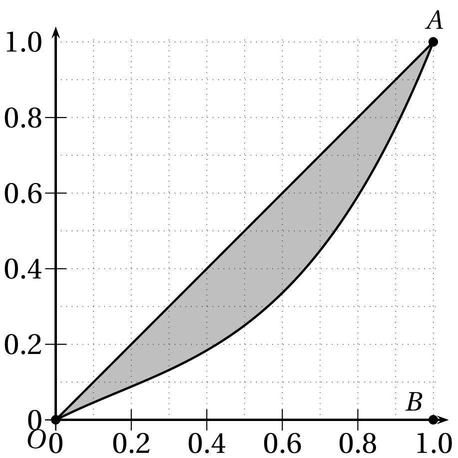
3. Généralités sur les courbes de LORENZ.
   (a) i. Expliquer pourquoi une courbe de LORENZ passe toujours par les points O et A.
   ii. Expliquer pourquoi une courbe de LORENZ ne peut jamais être au-dessus de la première bissectrice (la droite (OA) d'équation $y = x$ tracée en pointillés sur les différentes figures).
   On pourra se baser sur un exemple.
   iii. Expliquer pourquoi une courbe de LORENZ représente toujours une fonction croissante.
   (b) Justifier que pour qu'une fonction f convienne, il faut qu'elle vérifie les points suivants :
   - f doit être définie sur $[0\,;1]$;
   - $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
   - $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;1]$;
   - f croissante sur $[0\,;1]$.

   (c) Montrer que les fonctions suivantes conviennent :
   - $f_1(x) = x^2$;
   - $f_2(x) = x^3$;
   - $f_3(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$;
   - $f_4(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}-2)x - 1$.

Partie B : Indice de GINI

D'après Wikipédia, l'indice de GINI, noté γ, est une mesure du degré d'inégalité de la distribution des revenus dans une société donnée, développée par le statisticien italien CORRADO GINI.
Mathématiquement, on a :

$$\gamma = \frac{\text{aire de la partie grisée}}{\text{aire du triangle } OBA}$$



1. Expliquer pourquoi $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
Préciser dans quelle situation on a $\gamma = 0$ et dans quelle situation on a $\gamma = 1$.
2. Si on note f la fonction associée à la courbe de LORENZ, montrer que $\gamma = 1 - 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
3. (a) Calculer γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4, les indices de GINI correspondant aux fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 de la question 3c de la Partie A.
   (b) Ranger ces fonctions de celle correspondant à la répartition des salaires la plus égalitaire à la répartition la moins égalitaire.
4. Rechercher sur Internet l'indice de GINI (ou le coefficient de GINI $= 100 \times \gamma$) de la France et des États-Unis à une même date (on donnera l'adresse exacte de la source sur sa copie) et comparer ces deux indices.