Devoir maison n° 1

Généralités sur les fonctions

En Économie, on appelle :

Coûts fixes : les coûts indépendants du niveau d'activité ou des quantités produites dont l'entreprise doit s'acquitter pour son bon fonctionnement (loyer, coûts administratifs, etc.)

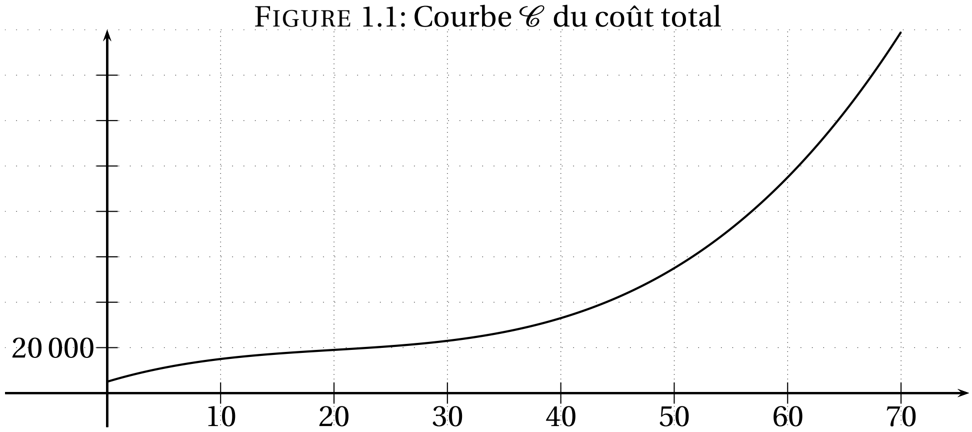
Coût marginal : le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût total par rapport à la quantité produite.

Une entreprise fabrique des objets et estime le coût total, en euros, de la production de x objets en fonction de x par : $C_T(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 5000$ pour $x \in [0\,;70]$.

Partie A. Étude du coût total.

1. Déterminer le montant en euros des coûts fixes.
2. Déterminer l'expression du coût marginal C_m en fonction de x.
3. Déterminer les variations du coût total sur $[0\,;70]$.
4. On donne sur la figure 1.1 de la présente page la courbe $\mathscr{C}$ représentant C_T.
   Quelle semble être la convexité de C_T ?

FIGURE 1.1: Courbe $\mathscr{C}$ du coût total



Partie B. Étude du coût marginal.

1. Calculer la dérivée de C_m en fonction de x.
2. Déterminer le sens de variation de C_m sur l'intervalle $[0\,;70]$.
3. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.
   Préciser l'abscisse de ce point.
4. (a) À partir de quelle quantité produite, chaque objet supplémentaire produit est-il plus coûteux que l'objet précédent ?

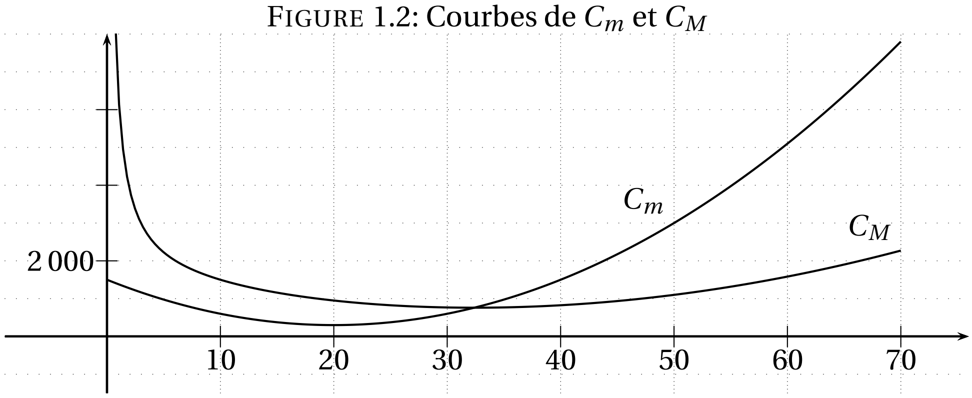
   (b) On appelle *rendement marginal* le rendement prévu pour la production d'un objet supplémentaire.
   Justifier l'affirmation suivante : « Pour une production de plus de 20 objets les rendements marginaux dans cette entreprise sont décroissants ».

Partie C. Étude du coût moyen.

Le coût moyen d'un objet lorsque x objets sont produits est donné par $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$ pour $x > 0$.

1. Quel est le coût moyen d'un objet pour 20 objets produits ?
2. Donner l'expression de $C_M(x)$.
3. (a) On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
   Expliquer pourquoi $C_M(x)$ est le coefficient directeur de la droite (OA) (où O est l'origine du repère).
   (b) En déduire, par lecture graphique sur la courbe $\mathscr{C}$ qu'il existe un x pour lequel $C_M(x)$ est minimal et donner la valeur de x avec la précision permise par le graphique.
4. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit f la fonction définie sur $]0\,;70]$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 - 5000$.
   (a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation en y indiquant les valeurs extrêmes.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [20\,;70]$.
   (c) Donner un encadrement d'amplitude 1 de α.
   (d) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
5. Recherche algébrique du minimum de $C_M(x)$.
   (a) Montrer que $C'_M(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ pour $x \in]0\,;70]$.
   (b) En déduire le signe de $C'_M(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau des variations de C_M.
   (d) En déduire un encadrement d'amplitude 1 de la valeur de x pour laquelle $C_M(x)$ est minimal.
6. On a représenté les courbes de C_m et de C_M dans le repère de la figure 1.2 de la présente page.
   (a) Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de x tel que $C_m(x) = C_M(x)$.
   (b) Résoudre algébriquement cette équation.

FIGURE 1.2: Courbes de C_m et C_M



7. On dit qu'une production se fait *à rendements d'échelle croissants* quand le coût moyen de production diminue, au fur et à mesure que la quantité produite augmente ; chaque unité produite entraîne alors un coût moins cher que l'unité précédente.
   Pour quelles productions d'objets peut-on dire alors que cette entreprise produit à rendements d'échelle croissants ?