Devoir surveillé n° 8

Lois à densité

EXERCICE 8.1 (4,5 points)**.**
Olivier vient tous les matins entre 7 h et 7 h 45 min chez Karine prendre un café.
Soit X la variable aléatoire correspondant à l'heure d'arrivée d'Olivier chez Karine.

1. Sachant qu'Olivier ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, à quelle loi de densité est associée à X ?
2. Calculer les probabilités suivantes et donner à chaque fois une interprétation du résultat :
   - $p(X \geqslant 7\,\text{h}\,30\,\text{min})$;
   - $p(X \leqslant 7\,\text{h}\,10\,\text{min})$;
   - $p(7\,\text{h}\,20\,\text{min} \leqslant X \leqslant 7\,\text{h}\,22\,\text{min})$;
   - $p(X = 7\,\text{h}\,30\,\text{min})$.
3. À quelle heure Karine peut-elle espérer voir Olivier arriver ?

EXERCICE 8.2 (5,5 points)**.**
1. Montrer que la fonction F telle que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
2. (a) Montrer que sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ la fonction f est positive.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
   (c) Expliquer alors pourquoi la fonction f peut être une fonction de densité sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
3. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   Calculer les probabilités des événements suivants (on donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur approchée au centième) :
   - $A : \{X < 2\}$;
   - $B : \{X \geqslant 2\}$.

EXERCICE 8.3 (4 points)**.**
Une entreprise produit des batteries pour véhicules électriques.
Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries soit en moyenne de 200 km mais les différents types de conduite et les conditions aléatoires de circulation font que l'autonomie X, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.
Une ville est située à 160 km.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier sa réponse.
3. Un conducteur prudent décide de ne pas prendre de risque : il ne fera que des trajets les plus courts dont il est sûr à 95 % que la batterie supportera le trajet sans recharge.
   On cherche donc x, le kilométrage maximum que ce conducteur se permet.
   (a) Montrer que x est tel que $p(X \leqslant x) = 0,05$.
   (b) En déduire le kilométrage qu'il ne devra pas dépasser.

EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
Une enquête est effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître la quantité de lait achetée en 1 mois. Elle montre qu'environ 5 % des familles achètent moins de 10 litres par mois alors que 80 % en achètent plus de 15 litres.
On choisit une famille au hasard.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de litres de lait acheté.
On admet que X suit une loi normale.
On se propose de déterminer l'espérance et la variance de X.

1. D'après les données de l'énoncé, et sans utiliser de calculatrice, donner une valeur minimale de l'espérance.
2. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$?
3. Exprimer en fonction de μ et de σ les valeurs a et b de Z correspondant respectivement à $X = 10$ et $X = 15$.
4. Traduire l'énoncé en termes de probabilités sur X, puis en termes de probabilité sur Z.
5. Utiliser la calculatrice pour trouver les valeurs de a et de b.
6. En déduire que μ et σ sont les solutions du système suivant *(les coefficients ont été arrondis au dixième)* :

$$\begin{cases} \mu - 1,6\sigma = 10 \\ \mu - 0,8\sigma = 15 \end{cases}$$

7. Déterminer les valeurs de μ et σ.
8. Quelle est la proportion de familles qui achètent entre 7,5 litres de lait et 32,5 litres de lait ?