Un corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (6,5 points).
Commun à tous les candidats
Partie A

1. (a) $f(0) = 0$ et $f(1) = 2\mathrm{e}$. .... 0,5 pt

   (b) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .... 0,5 pt
   Donc $f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$ et $f'(-1) = 0$ car il est dit que la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses. .... 1 pt

2. • On a :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
Les variations de f sont les suivantes	$\searrow$ $\quad$ $\nearrow$
Donc les signes de $f'(x)$ sont les suivants	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

   Donc ce ne peut pas être la courbe 2. .... 0,5 pt
   • Par ailleurs, d'après la question précédente, $f'(0) = 2$ donc la courbe de f' passe par le point $(0\,;2)$ ce ne peut donc pas être la courbe 3. .... 0,5 pt
   La courbe de f' est donc la courbe 1. .... 0,5 pt

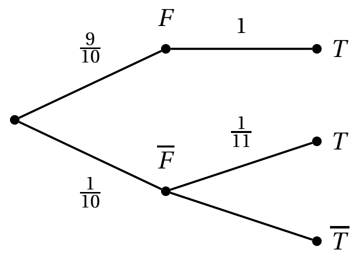
Partie B
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*
La fonction f précédente est, en fait, la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$.

1. $f = u \times v$ où $u(x) = 2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   $f' = u'v + uv'$ or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
   Donc $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x = (2+2x)\mathrm{e}^x = 2(x+1)\mathrm{e}^x$, soit la réponse **c**.
2. L'équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2(x-0)+0 \Leftrightarrow y = 2x$ soit la réponse **b**.
3. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ soit la réponse **b**.

EXERCICE 2 (8 points).
Pour les candidats de la série L et pour les candidats de la série SES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $p(\overline{F}) = 1 - p(F) = \frac{1}{10}$. .... 0,5 pt

2. (a)



.... 1 pt

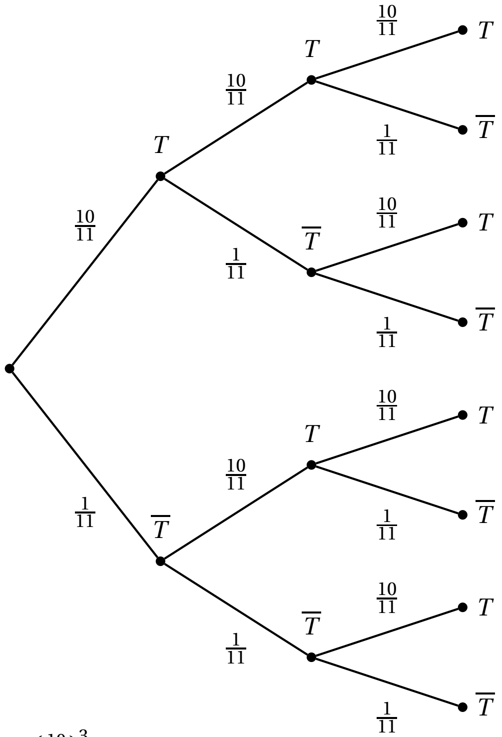
   (b) $p(T \cap F) = p(F) \times p_F(T) = \frac{9}{10} \times 1 = \frac{9}{10}$. .... 1 pt

   (c) On cherche en fait $p(\overline{F} \cap T)$. .... 0,5 pt
   $p(\overline{F} \cap T) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$ .... 1 pt

   (d) F et $\overline{F}$ réalisant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $p(T) = p(T \cap F) + p(\overline{F} \cap T)$. .... 0,5 pt
   Donc $p(T) = \frac{9}{10} + \frac{1}{110} = \frac{99}{110} + \frac{1}{110} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$ .... 1 pt

   (e) On cherche en fait $p_T(F)$. .... 0,5 pt
   $p_T(F) = \frac{p(T \cap F)}{p(T)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{11}} = \frac{9}{10} \times \frac{11}{10} = \frac{99}{100}$. .... 1 pt

3. L'évènement cherché est le contraire de l'évènement « Aucun appareil n'est pas accepté à l'issue du test » $\Leftrightarrow$ « Tous les appareils sont acceptés à l'issue du test ».
   On peut représenter la situation de la manière suivante :



Donc la probabilité cherchée est $1-\left(\frac{10}{11}\right)^3 \approx 0,25$. .... 1 pt

EXERCICE 2 (8 points).

Pour les candidats de la série SES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Question préliminaire :

Chaque questionnaire est une arête, il suffit donc de compter le nombre d'arêtes, ou bien d'additionner les degrés des sommets dont le résultat est le double du nombre d'arêtes :

Sommet	A	B	C	D	E	F	Total
Degré	4	5	3	4	2	2	20

Il y a donc 10 arêtes donc 10 questionnaires. .... 0,5 pt

Partie A

1. $G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .... 1 pt
2. Le graphe n'est pas complet car tous ses sommets ne sont pas adjacents, comme E et F par exemple. .... 1 pt
   Le graphe est connexe car deux sommets quelconques de ce graphe sont toujours reliés par une chaîne. .... 1 pt
3. Examinons si le graphe contient une chaîne eulérienne.
   Nous avons vu dans la question préliminaire que le graphe comporte exactement deux sommets impairs donc il contient une chaîne eulérienne (et pas de cycle) dont les extrémités sont forcément les sommets impairs : B et C.
   Il n'est donc pas possible de répondre à tous les questionnaires sans repasser deux fois devant le même en commençant par n'importe quelle zone puisqu'il faut débuter en B ou en C.
   Et si on débute en C la dernière zone visitée sera la B. .... 2 pts

Partie B .... 2,5 pts

*Vous répondrez **au choix** à l'**une** des deux questions suivantes en détaillant soigneusement votre réponse.*

Question 1 : Il s'agit en fait de chercher n, le nombre chromatique du graphe.

Minorant de n : Le sous graphe engendré par les sommets A, B, C et D est complet et d'ordre 4 donc $n \geqslant 4$.

Majorant de n : Procédons à une coloration, par exemple en utilisant l'algorithme de WELCH et PAUWELL

Sommet	B	A	D	C	E	F
Degré	5	4	4	3	2	2
Étape 1	couleur 1					
Étape 2		couleur 2			couleur 2	
Étape 3			couleur 3			couleur 3
Étape 4				couleur 4		

Donc $n \leqslant 4$.

Conclusion : $n \geqslant 4$ et $n \leqslant 4$ donc $n = 4$.

Le nombre minimum de couleurs pour illustrer chaque zone est donc de 4.

Question 2 : Il s'agit de déterminer le nombre de chaînes comportant trois arêtes dont les extrémités sont A et E.
G^3 donne le nombre de chaînes de longueur 3 entre les différents sommets.
D'après la calculatrice, le coefficient ligne 1 colonne 5 (ou ligne 5 colonne 1) de G^3 est 5.
Il y a donc 5 chaînes de longueur 3 entre les sommets A et E qui sont : AFBE, ABDE, ACDE, ADBE, ACBE.
Ce sont les trajets recherchés.

EXERCICE 3 (6,5 points).
Commun à tous les candidats

1. $u_1 = 0,9u_0 + 20 = 470$ et $u_2 = 0,9u_1 + 20 = 443$. .... 1 pt
2. $u_{n+1} = 0,9u_n + 20$ pour tout entier naturel n. .... 0,5 pt
3. On note, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 200$.
   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,9u_n + 20 - 200 = 0,9u_n - 180 = 0,9\left(u_n - \frac{180}{0,9}\right) = 0,9(u_n - 200) = 0,9v_n$. .... 1,5 pt
   (v_n) est donc une suite géométrique (de premier terme $v_0 = u_0 - 200 = 300$ et de raison $q = 0,9$). .... 0,5 pt
   (b) Comme c'est une suite géométrique $v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n. .... 0,5 pt
   (c) $v_n = u_n - 200 = 300 \times 0,9^n \Leftrightarrow u_n = 200 + 300 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n. .... 0,5 pt
4. *Dans les questions qui suivent, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   (a) (v_n) est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et dont le premier terme est positif, donc (v_n) décroissante :
   $v_{n+1} \leqslant v_n \Leftrightarrow u_{n+1} - 200 \leqslant u_n - 200 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Donc la suite (u_n) est aussi décroissante. 0,75pt
   Cela signifie que le nombre d'abonnés du site ne va faire que baisser d'une année à l'autre. .... 0,25 pt
   (b) Comme $0 < q < 1$, q^n va tendre vers 0 quand n tend vers l'infini.
   Donc u_n va tendre vers $200 + 300 \times 0 = 200$. .... 0,75 pt
   Cela signifie que le nombre d'abonnés du site va tendre vers 200 milliers d'abonnés. .... 0,25 pt

---

EXERCICE 4 (9 points).
Commun à tous les candidats
Partie A.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2 + \mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$.

1. $f(x) = -1 \Leftrightarrow -2 + \mathrm{e}^{2x-0,5x^2} = -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x-0,5x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x - 0,5x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 - 0,5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 = 0,5x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$. .... 0,5 pt
2. (a) $f = -2 + \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 2x - 0,5x^2$ donc $f' = 0 + u'\mathrm{e}^u$ or $u'(x) = 2 - 0,5 \times 2x = 2 - x$.
   Donc $f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$. .... 1 pt
   (b) $\mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$ strictement positif donc $f'(x)$ sera du signe de $2 - x$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$-2 + \mathrm{e}^2$	$\searrow$	

   .... 1 pt
3. (a) $f' = u \times v$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$ donc $f'' = u'v + uv'$ or $u'(x) = -1$ et $v'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$.
   Donc $f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{2x-0,5x^2} + (2 - x) \times (2 - x)\mathrm{e}^{2x-0,5x^2} = \left(-1 + (2 - x)^2\right)\mathrm{e}^{2x-0,5x^2} = (-1 + 4 - 4x + x^2)\mathrm{e}^{2x-0,5x^2} = (x^2 - 4x + 3)\mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$. .... 1 pt
   (b) Le signe de $f''(x)$ nous donnera la convexité de f.
   $\mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$ strictement positif donc $f''(x)$ sera du signe de $x^2 - 4x + 3$ qui est un trinôme positif sauf entre ses

racines : 1 et 3. Donc :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
f'		↗		↘		↗	
f		convexe		concave		convexe	

.... 1 pt

4. (a) Sur $[0\,;\,1]$:
   - f est continue
   - f est strictement croissante
   - $f(0) = -1 < 0 < f(1) = -2 + \mathrm{e}^{1,5} \approx 2,48$

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$. .... 1 pt

   (b) D'après la calculatrice :

x	0,38	α	0,39
$f(x)$	-	0	+

   Donc $0,38 < \alpha < 0,39$. .... 0,5 pt

   On admettra que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β appartenant à l'intervalle $[3,61\,;\,3,62]$.

Partie B.

1. Cela revient à résoudre $f(x) = -1$ or on sait que dans ce cas $x = 0$ ou $x = 4$.
   Donc l'entreprise aura un déficit de 1 000 euros pour une production de 0 kg ou de 400 kg. .... 0,5 pt
2. Cela revient à résoudre $f(x) \geqslant 0$ or, d'après les variations de f et les questions précédentes on a :

x	0		α		β		6
$f(x)$		−	0	+	0	−	

   Donc $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [\alpha\,;\,\beta]$.
   Donc l'entreprise sera bénéficiaire pour une production entre 39 kg et 361 kg. .... 1 pt
3. Cela revient à cherche pour quelle valeur de x $f(x)$ est maximale or d'après le tableau de variation de f le maximum est atteint pour $x = 2$ et vaut $f(2) = -2 + \mathrm{e}^2 \approx 5,389$.
   Donc pour une production de 200 kg le bénéfice est maximum et vaut environ 5 389 euros. .... 1 pt
4. Cela revient à chercher pour quelles valeurs de x $f'(x)$ est décroissante, or on a vu que c'était pour $x \in [1\,;\,3]$.
   Donc la croissance du bénéfice ralentit entre 100 kg et 300 kg. .... 0,5 pt