BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2013

Épreuve :
MATHÉMATIQUES

Séries
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES, toutes spécialités
LITTÉRAIRE, spécialité Mathématiques

Classes
TES1, TES2, TES3, TES4 ET TL1

Durée de l'épreuve : 3 heures

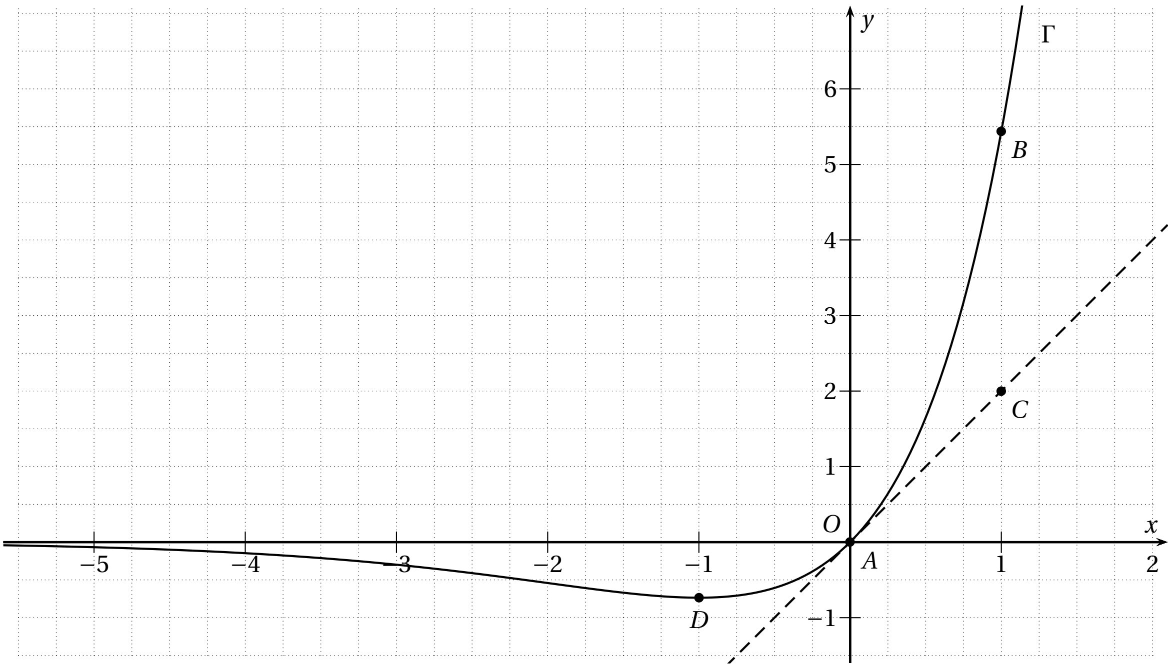
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le barème n'est qu'indicatif.

Le sujet comporte 4 pages.

EXERCICE 1 (6,5 points).
Commun à tous les candidats

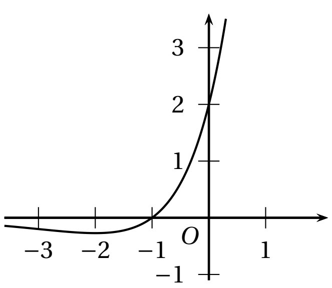
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthogonal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $A(0\,;0)$ et $B(1\,;2\mathrm{e})$ et la droite (AC), où $C(1\,;2)$, est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



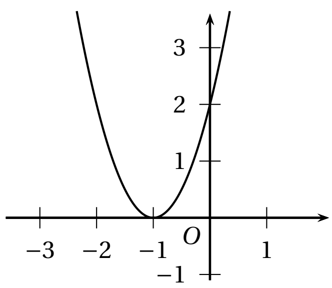
Partie A

1. (a) Sans justifier, déterminer les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.
   (b) En justifiant, déterminer les valeurs de de $f'(0)$ et de $f'(-1)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques de la figure ci-dessous, l'une représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.

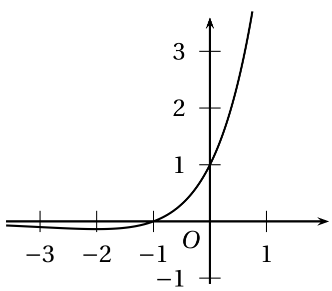
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Partie B

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*

La fonction f précédente est, en fait, la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{x}.$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x on a :
   a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{x}$ **b.** $f'(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x}$ **c.** $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{x}$
2. L'équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0 est :
   a. $y = x$ **b.** $y = 2x$ **c.** $y = -x$
3. La valeur exacte de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ est
   a. $\sqrt{\mathrm{e}}$ **b.** $-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ **c.** $-0,606$

EXERCICE 2 (8 points).
Pour les candidats de la série L et pour les candidats de la série SES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.
La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.
On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\overline{F}$ l'événement contraire de F.

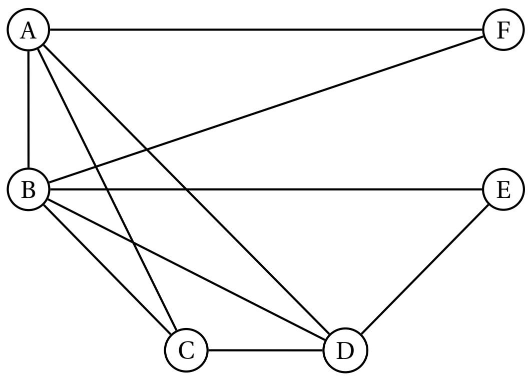
1. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.
2. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison.
   Quand un appareil est en parfait état, il est toujours accepté à l'issue du test. Quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.
   On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».
   (a) Construire un arbre pondéré résumant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité de $T \cap F$ est $\frac{9}{10}$.
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement « l'appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement et il est accepté à l'issue du test ».
   (d) Montrer que la probabilité de T est $\frac{10}{11}$.
   (e) L'appareil vient d'être accepté. Calculer la probabilité qu'il est en parfait état.
3. On choisit trois appareils au hasard. On admettra que la production est suffisamment importante pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'au moins un des trois appareils ne soit pas accepté à l'issue de son test.

EXERCICE 2 (8 points).
Pour les candidats de la série SES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.

Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :
- A. Eau
- B. Économie d'énergies
- C. Plantations et cultures locales
- D. Développement durable
- E. Biotechnologies
- F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



Question préliminaire :
Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

Partie A

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   (a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
   (b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

   Dans les deux cas, 3a et 3b, justifiez votre réponse.

Partie B

*Vous répondrez **au choix** à l'**une** des deux questions suivantes en détaillant soigneusement votre réponse.*

Question 1 : Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.
Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).
Déterminer le nombre minimum de couleurs pour illustrer chaque zone.

Question 2 : Combien y a-t-il de trajets permettant d'aller de la zone A à la zone E en répondant exactement à trois questionnaires ? *On indiquera précisément comment ce nombre a été trouvé et on donnera les trajets.*

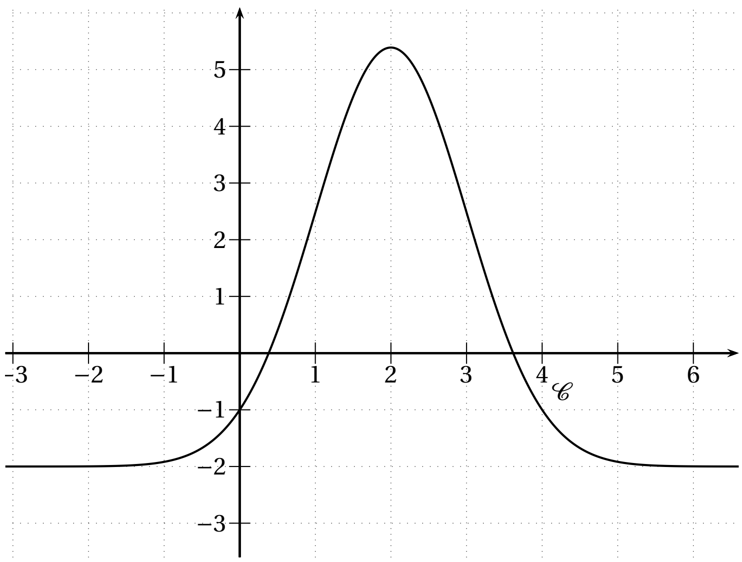
EXERCICE 3 (6,5 points).
Commun à tous les candidats

Un site de jeux vidéo en ligne possédait, en 2010, 500 000 abonnés dans le monde.
Un administrateur remarque que, chaque année, 20 000 nouvelles personnes s'abonnent tandis que 10 % ne se réabonnent pas.
On note, pour tout nombre entier naturel n, u_n le nombre d'abonnés en milliers en $2010+n$. Ainsi $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On note, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 200$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9v_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Montrer que $u_n = 200 + 300 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n.
4. *Dans les questions qui suivent, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   (a) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) et interpréter le résultat obtenu en terme de nombre d'abonnés.
   (b) Étudier la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat obtenu en terme de nombre d'abonnés.

EXERCICE 4 (9 points).
Commun à tous les candidats

Partie A.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2 + e^{2x-0,5x^2}$.
On donne sa courbe $\mathscr{C}$ sur la figure ci-dessous.



1. Résoudre l'équation $f(x) = -1$.
2. (a) Montrer que $f'(x) = (2-x)e^{2x-0,5x^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Calculer $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de f.
4. (a) Démontrer que, sur l'intervalle $[0; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
   On admettra que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β appartenant à l'intervalle $[3,61; 3,62]$.

Partie B.
Une usine produit chaque mois entre 0 et 600 kilogrammes de poudre de perlimpinpin et vend toute sa production.
Le bénéfice, en milliers d'euros, est donné par la fonction $f(x) = -2+e^{2x-0,5x^2}$ où $x \in [0; 6]$ est la production en centaines de kilogrammes.

1. Déterminer pour quelle production l'usine a un déficit de 1 000 euros.
2. Déterminer quelle doit être la production, au kilogramme près, pour que l'usine soit bénéficiaire.
3. Déterminer pour quelle production le bénéfice de l'usine est maximal et donner ce bénéfice à l'euro près.
4. Déterminer la production pour laquelle la croissance du bénéfice ralentit.