

Devoir surveillé n° 3

Généralités sur les fonctions – Probabilités conditionnelles

EXERCICE 3.1 (8 points).

On a recensé ci-dessous la superficie de l'espace urbain en France, en millier de km^2 , depuis 1954 (source INSEE).

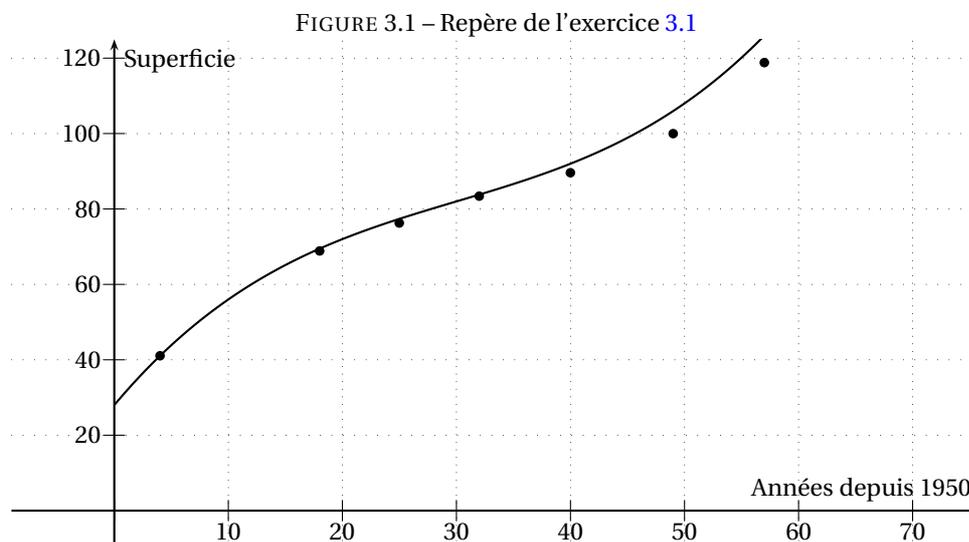
Années	1954	1968	1975	1982	1990	1999	2007
Superficie urbaine	41,1	68,9	76,3	83,4	89,6	100	118,8

Une modélisation consiste à estimer la superficie urbaine $S(x)$, en millier de km^2 , par :

$$S(x) = 0,001x^3 - 0,09x^2 + 3,6x + 28$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 1950.

Dans le repère de la figure 3.1 de la présente page on a représenté le nuage de points correspondant aux données de l'INSEE et la courbe correspondant au modèle.



On suppose que ce modèle reste valable jusqu'en 2020, c'est-à-dire pour $x \in [0; 70]$.

Le **rythme de croissance instantané** de la superficie est assimilé à la dérivée de S .

- Calculer la valeur estimée de la superficie urbaine en 1990, à l'aide de ce modèle.
 - Calculer le pourcentage d'erreur par rapport à la valeur effective de la superficie urbaine en 1990.
 - Estimer la superficie urbaine en 2015.
- Calculer $S'(x)$, la dérivée de S , puis $S''(x)$, la dérivée seconde de S .
 - Justifier que la fonction S est croissante sur $[0; 70]$. Interpréter le résultat.
- Au cours de quelle année le rythme de croissance est-il le plus faible? Que représente cette année pour la fonction S ? Retrouver graphiquement le résultat.
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On a pu lire le commentaire suivant à propos du recensement de la superficie urbaine :

« Le rythme de croissance de l'espace urbain entre les recensements de 1999 et 2007 a été plus important que lors des décennies précédentes, et se rapproche de ce que l'on avait connu dans les années 1950-1960. »

Expliquer ce commentaire.

EXERCICE 3.2 (5 points).

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur A et 35 % dans le secteur B.

Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.

Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur B, ce taux est de 30 %.

On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi.

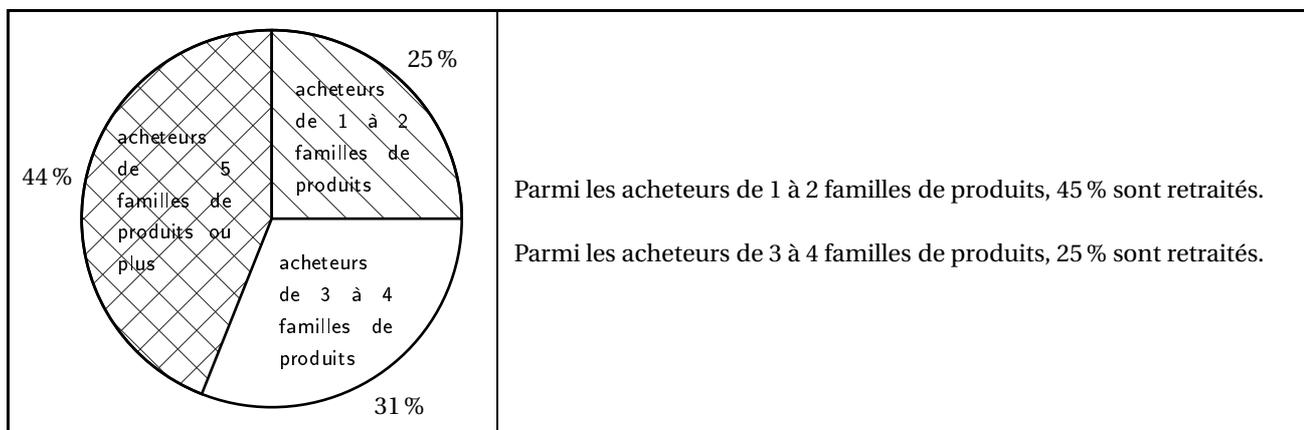
On note :

- A : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A ».
- B : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B ».
- S : « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.
3. *Toute trace de recherche même incomplète, d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée.
L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifier la réponse.
4. Sachant que le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé, quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur A ? (le résultat sera arrondi à 10^{-2})

EXERCICE 3.3 (7 points).

La Fédération e-commerce et Vente à Distance (FEVAD) a effectué en octobre 2010 une enquête auprès de 719 acheteurs à distance âgés de 18 ans et plus. Sur le questionnaire proposé, ces personnes ont été interrogées sur le nombre de familles de produits (vêtements, informatique, loisirs, ...) achetés à distance au cours des 12 derniers mois. L'étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :



Le responsable des ventes tire un questionnaire au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être tiré. On note :

- A l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 1 à 2 familles de produits. »
- B l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
- C l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 5 familles de produits ou plus. »
- R l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité. »

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre.
2. (a) Calculer la probabilité $p(A \cap R)$.
(b) Déterminer la probabilité de l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
(c) On sait de plus que 21,7 % des acheteurs interrogés sont des retraités. Vérifier que $p(C \cap R) = 0,027$.
3. Le responsable des ventes décide de lancer une campagne publicitaire dès lors que le pourcentage de retraités parmi les acheteurs de 5 familles de produits ou plus est inférieur à 8 %.
Quelle décision prendra-t-il ?