Devoir surveillé n° 2

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 2.1 (3,5 points)**.**
On a représenté ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $A(0;2)$ et $D(2,22;0)$ et la droite (AB), où $B(-4;0)$, est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Sans justifier, déterminer les valeurs de $f(0)$, de $f'(0)$ et de $f'(1)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques de la figure 2.1 de la présente page, l'une représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.
3. Parmi les trois représentations graphiques de la figure 2.1 de la présente page, l'une représente une fonction h telle que $h' = f$. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.

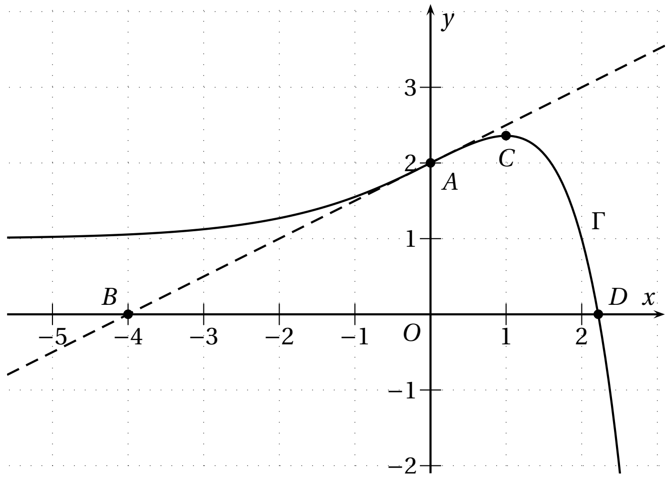
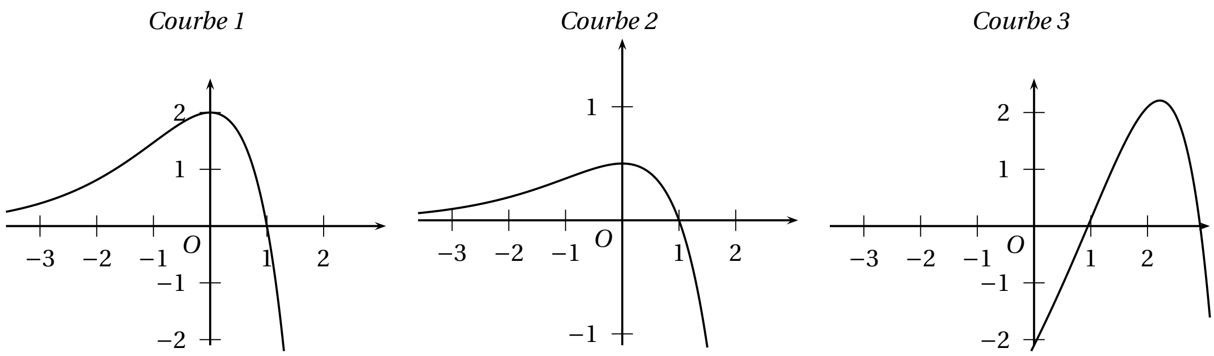


FIGURE 2.1 – Courbes de l'exercice 2.1

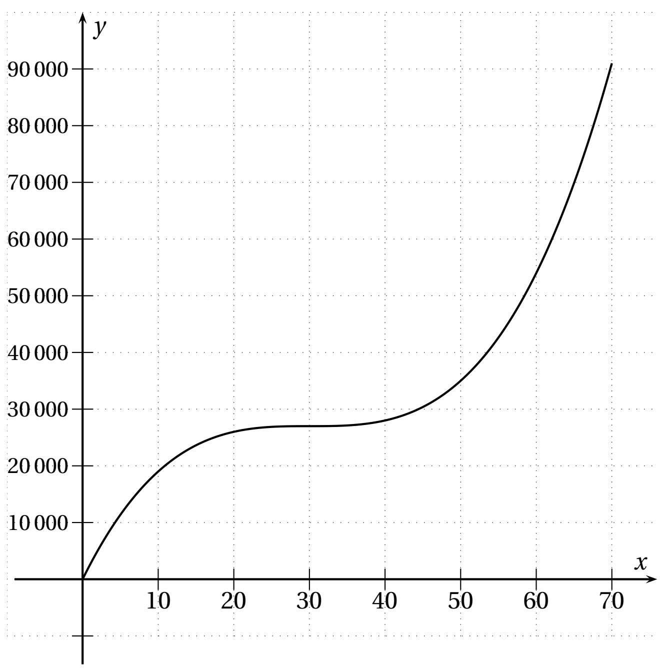


EXERCICE 2.2 (4,5 points)**.**
Une entreprise fabrique des sacs de luxe en cuir. Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs, tel que $0 \leqslant x \leqslant 70$.
Le coût, exprimé en euros, de la production journalière de x sacs est donné par la fonction C définie sur $[0;70]$ par :

$$C(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$$

Sa courbe représentative est donnée sur la figure ci-contre.

1. En justifiant par des arguments graphiques, conjecturer la convexité de C.
2. Étudier, par le calcul, la convexité de C et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées $(x_I ; y_I)$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe en I et représenter cette tangente dans le repère.
4. On appelle *coût marginal*, noté C_m, le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût par rapport à la quantité produite. Expliquer pourquoi le coût marginal est minimum en x_I.



EXERCICE 2.3 (12 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations (on indiquera les valeurs des extremums locaux).
2. Montrer que la courbe admet deux tangentes, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ parallèles à l'axe des abscisses.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;1]$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (c) En déduire les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées de B, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
5. (a) Par le calcul, étudier la convexité de f.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées $(x_I\,; y_I)$.
   (c) Déterminer une équation de $\mathscr{D}$, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en I.
6. Dans le repère de la figure 2.2 de la présente page :
   (a) placer les points correspondants aux extremums locaux ;
   (b) placer les points A, B et I ;
   (c) tracer les tangentes $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ et $\mathscr{D}$;
   (d) tracer $\mathscr{C}$.

FIGURE 2.2 – Repère de l'exercice 2.3