Devoir surveillé n° 1

Suites

EXERCICE 1.1 (10 points).
Un bail est un contrat de location entre un locataire et un propriétaire.
Traditionnellement sa durée est de trois ans.

On propose à un locataire deux types de bail :

Contrat A : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 11,5 euros pendant la durée des trois ans.

Contrat B : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 1 % pendant la durée des trois ans.

Partie A : Étude du contrat A.
On appelle A_n le montant du loyer donné par le contrat A au mois de rang n pour n variant de 0 à 35.

1. Justifier que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer A_n en fonction de n.
3. Déterminer le loyer du dernier mois avec le contrat A.
4. On donne l'algorithme suivant :

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 1000
   s PREND LA VALEUR 1000
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u+11,5
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
SORTIES
   AFFICHER s
```

   (a) Le programmer sur sa calculatrice et indiquer ce qu'il affiche pour $n = 15$.

   (b) Interpréter ce résultat.

   On admet, pour la suite, que cet algorithme renvoit la valeur 43 245 pour $n = 35$.

Partie B : Étude du contrat B.
On appelle B_n le montant du loyer donné par le contrat B au mois de rang n pour n variant de 0 à 35.

1. Justifier que (B_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer B_n en fonction de n.
3. Déterminer le loyer du dernier mois avec le contrat B.
4. Déterminer, par le calcul, la somme totale que devra payer le locataire sur la durée des trois ans s'il choisit le contrat B.

Partie C
Déterminer quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire.

EXERCICE 1.2 (10 points)**.**
Au 1er janvier 2010, une ville avait une population de 300 000 habitants.
Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2010 :

- le nombre d'habitants de la ville diminue chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- 5 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville du fait des mouvements migratoires.

Partie A : Étude théorique.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année $(2010+n)$.
Ainsi $u_0 = 300000$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? *Justifier.*
   (c) La suite (u_n) est-elle géométrique ? *Justifier.*
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 5000$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 100000$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une sutie géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 200000 \times 0,95^n + 100000$.
   (e) Déterminer $\lim u_n$.

Partie B.
Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population en utilisant le modèle théorique étudié à la **partie A**.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2. À partir de quelle année la population de cette ville passera-t-elle sous la barre des 150 000 habitants ? *Justifier.*
3. Comment interpréter le résultat obtenu à la question 3e de la **partie A** ?