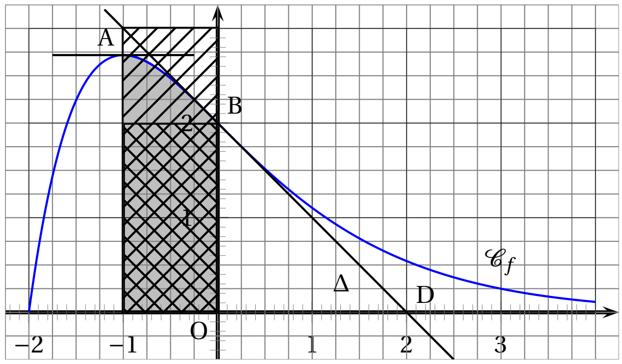
Corrigé du baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (4 points)**.**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthormal d'unité graphique 2 cm.
On note e le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points B(0 ; 2) et A$(-1\,;\mathrm{e})$.
Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point D(2 ; 0).



1. En utilisant les données graphiques, donner sans justifier :
   (a) le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2\,;4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,25 des solutions éventuelles.

   L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions x_1 et x_2 telles que $-2 < x_1 < -1{,}75$ et $1 < x_2 < 1{,}25$.

   (b) la valeur de $f'(-1)$.

   $f'(-1) = 0$ (tangente horizontale).

   (c) le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

   $f'(x)$ est positif sur $[-2\,;-1]$ (la fonction f est croissante sur cet intervalle) et négatif sur $[-1\,;4]$ (la fonction f est décroissante sur cet intervalle).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Donner en justifiant :

   (a) le coefficient directeur de la tangente Δ.

   Soit m ce coefficient. $\Delta = (\mathrm{BD})$ donc $m = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{0-2}{2-0} = -1$

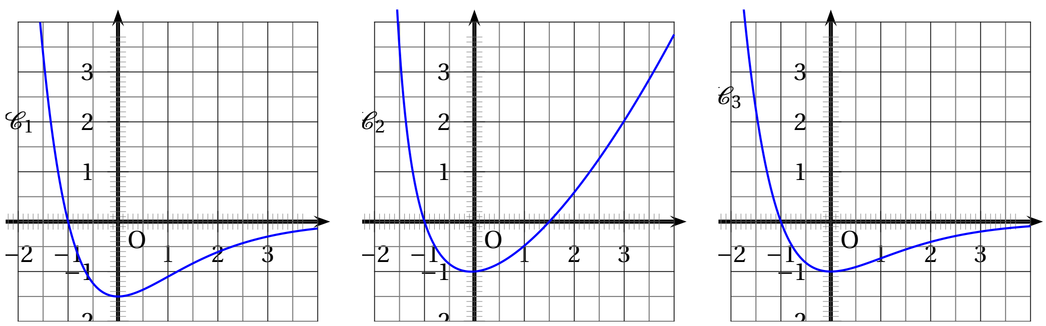
   (b) l'encadrement par deux entiers naturels consécutifs de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre -1 et 0, grisée sur le schéma ci-dessus. On peut encadrer cette aire entre deux rectangles de base 1 de hauteur 2 (doubles hachures sur le schéma) et l'autre de base 1 et de hauteur 3 (hachures sur le schéma). Donc l'un d'aire 2 unités d'aire et l'autre d'aire 3 unités d'aire. Finalement :

   $$2 \leqslant \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$$

   (c) celle des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ données ci-dessous qui représente la fonction dérivée f' de la fonction f.

   La fonction f étant croissante sur $[-2\,;-1]$ et décroissante sur $[-1\,;4]$, sa dérivée f' est respectivement positive et négative sur ces deux intervalles. La courbe de f' ne peut donc pas être $\mathscr{C}_2$.
   On sait que la tangente Δ à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur -1, donc $f'(0) = -1$. La courbe de f' ne peut donc pas être $\mathscr{C}_1$.
   La courbe de f' ne peut donc être que $\mathscr{C}_3$.



EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Dans un lycée général et technologique, il y a 1 400 *lycéens* : des *élèves* (de seconde, première ou terminale) et des *étudiants* (en section de technicien supérieur – STS).
Pour pouvoir disposer des collections de manuels scolaires, tous les lycéens doivent adhérer à la coopérative scolaire et payer une location annuelle d'un montant de 50 € pour les élèves et 60 € pour les étudiants.
Sur l'ensemble des adhérents à la coopérative scolaire, 62,5 % sont les élèves de seconde, première ou terminale. Les autres sont les étudiants de STS.
Depuis quelques années, les élèves de seconde, première ou terminale disposent de chèques-lire avec lesquels ils peuvent régler cette location :

- 40 % paient leur location à l'aide de chèques-lire,
- 56 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les étudiants de STS ne disposent pas de chèques-lire :

- 96 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Partie I
Les 1 400 lycéens, élèves comme étudiants, adhèrent à cette coopérative.

1. Calculer le montant des versements effectués par chèque bancaire.

> Sur les 1 400 lycéens, 62,5 % sont des élèves, soit $1400 \times 0,625 = 875$ élèves.
> Sur ces 875 élèves, 56 % paient par chèque bancaire, soit $875 \times 0,56 = 490$ élèves et chacun paye 50 €.
> $1400 - 875 = 525$ lycéens sont des étudiants et 96 %, soit $525 \times 0,96 = 504$ étudiants et chacun paye 60 €.
> Le montant des versements effectués par chèque bancaire est donc de $490 \times 50 + 504 \times 60 = 54740$ €.

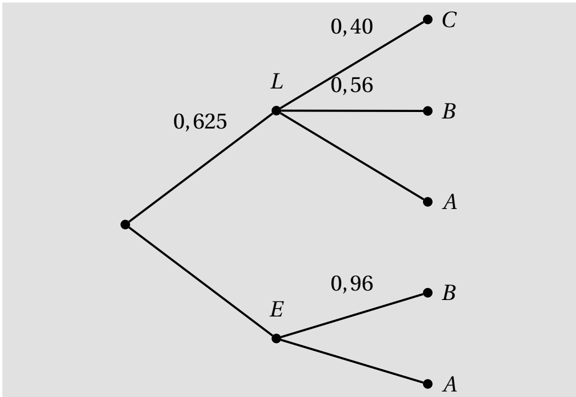
2. Calculer le pourcentage du montant total des locations que cette somme représente.

> Le montant total des locations est de $875 \times 50 + 525 \times 60 = 75250$.
> Cette somme représente donc $\frac{54740}{75250} \approx 0,7274 = 72,74\%$ du montant total.

Partie II
On prend au hasard la fiche d'un adhérent à la coopérative scolaire parmi les 1 400 fiches.
On note :

- L l'évènement « l'adhérent est un élève » ;
- E l'évènement « l'adhérent est un étudiant en STS » ;
- C l'évènement « l'adhérent paie avec ses chèques-lire » ;
- B l'évènement « l'adhérent paie avec un chèque bancaire » ;
- A l'évènement « l'adhérent paie par un autre moyen de paiement ».

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.



2. (a) Calculer la probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire.

> Appelons $p(A)$ la probabilité de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.
> $p(L \cap C) = p(L) \times p_L(C) = 0,625 \times 0,40 = 0,25$.
> La probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire est donc de 0,25.

   (b) Calculer la probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire.

> $p(E \cap B) = p(E) \times p_E(B) = (1 - 0,625) \times 0,96 = 0,36$
> La probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire est donc de 0,36.

   (c) Démontrer que la probabilité que l'adhérent ait payé par chèque bancaire est de 0,71.

> D'après la formule des probabilités totales :
> $p(B) = p(L \cap B) + p(E \cap B) = p(L) \times p_L(B) + p(E \cap B) = 0,625 \times 0,56 + 0,36 = 0,35 + 0,36 = 0,71$.

3. Un adhérent a payé par chèque bancaire. Calculer le probabilité que ce soit un élève.

> $p_B(L) = \frac{p(B \cap L)}{p(B)} = \frac{0,35}{0,71} \approx 0,493$

EXERCICE 2 (5 points)**.**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin de la figure 6.1 joint en annexe page suivante, on a placé les points $A(0\,;2\,;0)$, $B(0\,;0\,;6)$, $C(4\,;0\,;0)$, $D(0\,;4\,;0)$ et $E(0\,;0\,;4)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur les plans de base sur le dessin joint en annexe.

1. (a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).

   Trois points non alignés définissent un plan. Regardons si C, D et E sont alignés.
   C, D et E alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{cases} 0-4=k(0-4)\\ 4-0=k(0-0)\\ 0-0=k(4-0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=-4k\\ 4=0k\\ 0=4k\end{cases}$.
   Ce qui est impossible ($0k=0\neq 4$), donc C, D et E définissent un plan.

   (b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.

   Deux méthodes possibles :
   - (CDE) admet une équation du type $ax+by+cz=d$ où a, b, c et d sont des réels et $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
     Comme C, D et E appartiennent à ce plan, leurs coordonnées vérifient cette équation, et on a donc :
     $\begin{cases} 4a=d\\ 4b=d\\ 4c=d\end{cases}$ En posant $d=4$ on obtient $(CDE): x+y+z=4$.
   - Regardons si les coordonnées de C, D et E vérifient l'équation proposée :
     $x_C+y_C+z_C=4+0+0=4$ donc C appartient à (CDE).
     $x_D+y_D+z_D=0+4+0=4$ donc D appartient à (CDE).
     $x_E+y_E+z_E=0+0+4=4$ donc E appartient à (CDE).

   Donc $x+y+z=4$ est bien une équation de (CDE).

2. (a) Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et (CDE) sont sécants. On note Δ leur intersection.

   $\vec{n}(0\,;3\,;1)$ et $\vec{m}(1\,;1\,;1)$ sont des vecteurs normaux respectif de $\mathscr{P}$ et (CDE).
   $\mathscr{P} \parallel (CDE) \Leftrightarrow \vec{n}=k\vec{m} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=k\\ 3=k\\ 1=k\end{cases}$
   Ce qui est impossible (k ne peut pas valoir 0, 3 et 1) donc les deux plans ne sont parallèles ; ils sont donc sécants.

   (b) Sans justifier, représenter Δ en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.

   Δ est l'intersection de $\mathscr{P}$ et (CDE). Or les intersections de ces plans avec le plan (yOz) se coupent en $(0\,;1\,;3)$ et les intersections de ces plans avec le plan (xOy) se coupent en $(2\,;2\,;0)$. La droite Δ passe donc par ces deux points. On l'a représentée en rouge sur l'annexe.

3. On considère les points $F(2\,;0\,;0)$ et $G(0\,;3\,;0)$.
   On note $\mathscr{P}'$ le plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\vec{k}\right)$ et contenant les points F et G.

   (a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
   Sans justifier, représenter le plan $\mathscr{P}'$ par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.

   Étant parallèle à l'axe des côtes, ses traces sur les plans (yOz) et (xOz) sont parallèles à l'axe (Oz), d'où sa trace en bleu sur la figure en annexe.

   (b) Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan $\mathscr{P}'$.

   Les coordonnées de F et de G vérifient l'équation de $\mathscr{P}'$ donc : $\begin{cases} 2a=6\\ 3b=6\end{cases} \Leftrightarrow \mathscr{P}': 3x+2y=6$.

4. L'intersection des plans (CDE) et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ'.
   Sans justifier, représenter la droite Δ', d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.

   Δ' est l'intersection de $\mathscr{P}'$ et (CDE). Or les intersections de ces plans avec le plan (yOz) se coupent en $(0\,;3\,;1)$ et les intersections de ces plans avec le plan (xOz) se coupent en $(2\,;0\,;2)$. La droite Δ' passe donc par ces deux points. On l'a représentée en vert sur l'annexe.

5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z & = & 6 \\ x+y+z & = & 4 \\ 3x+2y & = & 6 \end{array}\right.$$

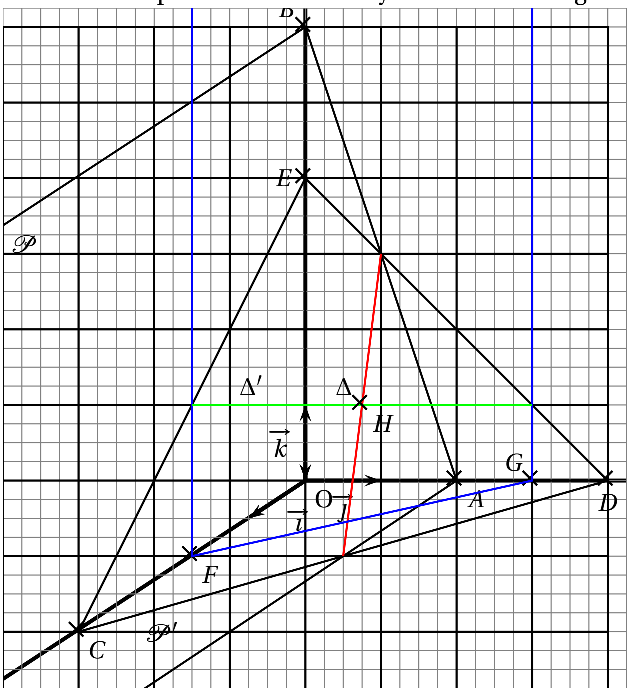
   (a) Résoudre ce système.

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=4 & L_1 \\ 3y+z=6 & L_2 \\ 3x+2y=6 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y+z=4 & L_1 \\ 3y+z=6 & L_2 \\ y+3z=6 & L_3' : 3L_1-L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y+z=4 & L_1 \\ 3y+z=6 & L_2 \\ 8z=12 & L_3'' : 3L_3'-L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1,5 \\ y=1,5 \\ x=1 \end{array}\right.$$

   (b) Que peut-on alors en déduire pour les droites Δ et Δ' ?

   Les deux premières lignes sont le système d'équations de Δ et les deux dernières le système d'équations de Δ' donc les deux droites sont sécantes en un point H de coordonnées $(1\,;\,1,5\,;\,1,5)$ (représenté sur la figure).

FIG. 6.1 – Figure de l'exercice 2 pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité



EXERCICE 3 (5 points).
Commun à tous les candidats.
Pour établir le prix unitaire le plus adapté d'un produit, une société effectue une étude statistique.
Le tableau suivant indique le nombre d'acheteurs, exprimé en milliers, correspondant à un prix unitaire donné, exprimé en euros :

Prix en euros : x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'acheteurs en milliers : y_i	125	120	100	79	70	50	40	25

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans le repère de la figure 6.2 fourni en annexe page suivante (unités 1 cm pour un euro sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'acheteurs sur l'axe des ordonnées).

   Voir la figure 6.2 page ci-contre.

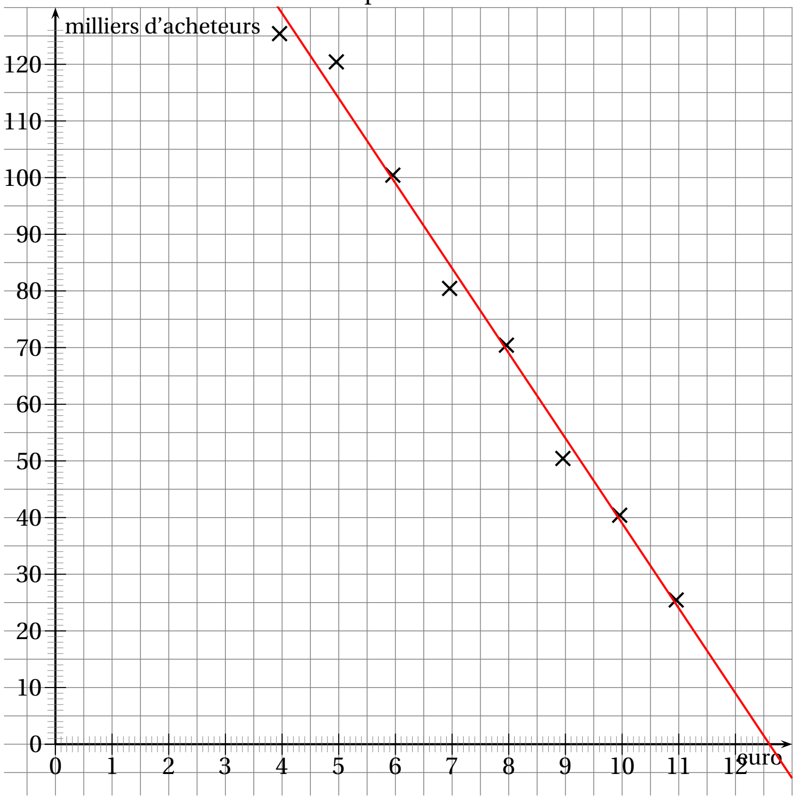
2. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   D'après la calculatrice $y = -14,99x + 188,54$

3. Pour la suite, on prendra $y = -15x + 189$ comme équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de y en x.

   (a) Tracer la droite $\mathscr{D}$.

FIG. 6.2 – Repère de l'exercice 3



En posant $x = 4$, on obtient $y = -60 + 189 = 129$. En posant $x = 11$, on obtient $y = -165 + 189 = 24$.
Ce qui donne la droite en rouge dans le repère.

(b) En utilisant l'ajustement affine, estimer graphiquement, à l'euro près, le prix unitaire maximum que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs.

D'après l'ajustement affine, le nombre d'acheteurs atteint 0 pour $x \approx 12,60$ €. Donc, à l'euro près, le prix unitaire maximum pour conserver des acheteurs est de 12 € car à 13 € il n'y aura plus d'acheteurs.

(c) i. En utilisant l'ajustement affine précédent, justifier que la recette $R(x)$, exprimée en milliers d'euros, en fonction du prix unitaire x d'un objet, exprimé en euros, vérifie $R(x) = -15x^2 + 189x$.

La recette, en milliers d'euros, est égale au nombre d'acheteurs $(-15x + 189)$ multiplié par le prix (x).
Donc $R(x) = (-15x + 189)x = -15x^2 + 189x$.

ii. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -15x^2 + 189x$.

$f'(x) = -30x + 189$ donc :

x	0		$6,3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$595,35$	$\searrow$	

En effet f' est une fonction affine décroissante qui s'annule en $-30x + 189 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{189}{30} = 6,3$.
Par ailleurs $f(0) = 0$ et $f(6,3) = 595,35$

iii. Quel conseil peut-on donner à la société ? Argumenter la réponse.

Pour que la recette soit maximale, il faut que le prix soit de 6,3 € comme l'indiquent les variations de f.

EXERCICE 4 (6 points).
Commun à tous les candidats.
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x(1 - \ln x)$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (*on rappelle que la limite en* 0 *de la fonction u définie sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $u(x) = x\ln x$ *est* 0).

- $f(x) = 2x(1-\ln x)$ or :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par produit, }\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
- $f(x) = 2x - 2x\ln x$ or :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} 2x = 0\\ \lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to0} f(x) = 0 - 2\times 0 = 0$$

(b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).

$f(x) = 2x(1-\ln x)$ donc $f'(x) = (2)(1-\ln x) + (2x)(-\frac{1}{x}) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x$

(c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x)$ est du signe opposé à celui de $\ln x$ donc ($f(1) = 2(1-\ln 1) = 2$) :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
f	|| 0	↗	2	↘	$-\infty$

2. Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.

$2x(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ ou $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1 = \ln x \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln \mathrm{e} = \ln x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \mathrm{e}$.
0 n'appartenant pas à l'ensemble de définition de f, $f(x) = 0$ n'a qu'une seule solution : $x = \mathrm{e}$.
Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses : A (e ; 0).

3. (a) Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

$f(x) = 2x(1-\ln x)$ mais $x \in]0\,;\,+\infty[$ donc $2x$ est strictement positif.
Alors $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \ln \mathrm{e} \geqslant \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e} \geqslant x$.
La courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \leqslant \mathrm{e}$.

(b) Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$F'(x) = (2x)\left(\frac{3}{2} - \ln x\right) + \left(x^2\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x = 2x(1-\ln x) = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

(c) On désigne par $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{D}$ puis, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1) = \mathrm{e}^2\left(\frac{3}{2} - \ln \mathrm{e}\right) - 1^2\left(\frac{3}{2} - \ln 1\right) = \mathrm{e}^2\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{3}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}\text{ unités d'aires} \approx 2,19\text{ unités d'aires}$$