Devoir surveillé n°5

Probabilités conditionnelles – Équations cartésiennes – Coloration de graphes

EXERCICE 5.1 (5 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.
Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le deuxième producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».
Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.
On appellera :

- F_1 l'événement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »
- F_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »
- F_3 l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »
- C l'événement : « la pomme prélevée a un bon calibre »
- $\overline{C}$ l'événement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1. Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre en y reportant les données de l'énoncé et les résultats de la question précédente.
3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144 0.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,846 5.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :

   « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

   Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.

EXERCICE 5.2 (5 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Une boîte de chocolats contient 50 % de chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs. Tous les chocolats de la boîte sont de même forme et d'emballage identique.
Ils sont garnis soit de praliné soit de caramel et, parmi les chocolats au lait, 56 % sont garnis de praliné.
On choisit au hasard un chocolat de la boîte. On suppose que tous les choix sont équiprobables.
On note :

- L : l'événement « le chocolat choisi est au lait » ;
- N : l'événement « le chocolat choisi est noir » ;
- B : l'événement « le chocolat choisi est blanc » ;
- A : l'événement « le chocolat choisi est garni de praliné » ;
- $\overline{A}$: l'événement « le chocolat choisi est garni de caramel ».

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Traduire les données du problème à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat au lait.
3. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit au lait et garni de praliné.
4. Dans la boîte, 21 % des chocolats sont noirs et garnis de praliné.
   Montrer que la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné, sachant que c'est un chocolat noir, est égale à 0,7.
5. Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné.
   (a) Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit blanc et garni de praliné.
   (b) En déduire la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat blanc.

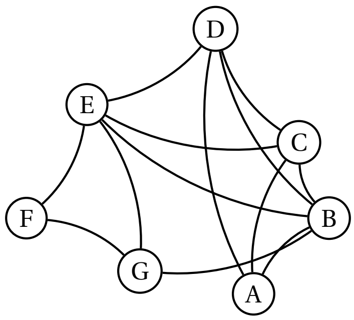
EXERCICE 5.3 (5 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(4\,;0\,;2)$ et $B(11\,;-2\,;7)$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Soit $M(x\,;y\,;z)$. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{5}$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
2. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives :

$$\mathscr{P}_1 : x+6y+z=6 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_2 : x+y-z=2.$$

   (a) Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
   (b) Montrer que A et B appartiennent à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$.
   (c) En déduire un autre système d'équations cartésiennes de (AB).
   (d) Représenter dans le repère de la figure 5.1 page suivante, en vert, la trace de $\mathscr{P}_1$ sur chacun des plans de coordonnées et, en bleu, celle de $\mathscr{P}_2$.
   (e) En déduire, en rouge, la représentation de la droite (AB).

EXERCICE 5.4 (5 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathscr{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathscr{G}$?
2. Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
   (a) i. Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?
       ii. Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2 ?
   (b) i. Proposer un coloriage adapté à cette condition en utilisant l'algorithme de WELCH et POWELL.
       ii. Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathscr{G}$?
   (c) Conclure.
3. (a) Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
   (b) Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

FIG. 5.1 – Figure de l'exercice 5.3