Devoir surveillé n°4

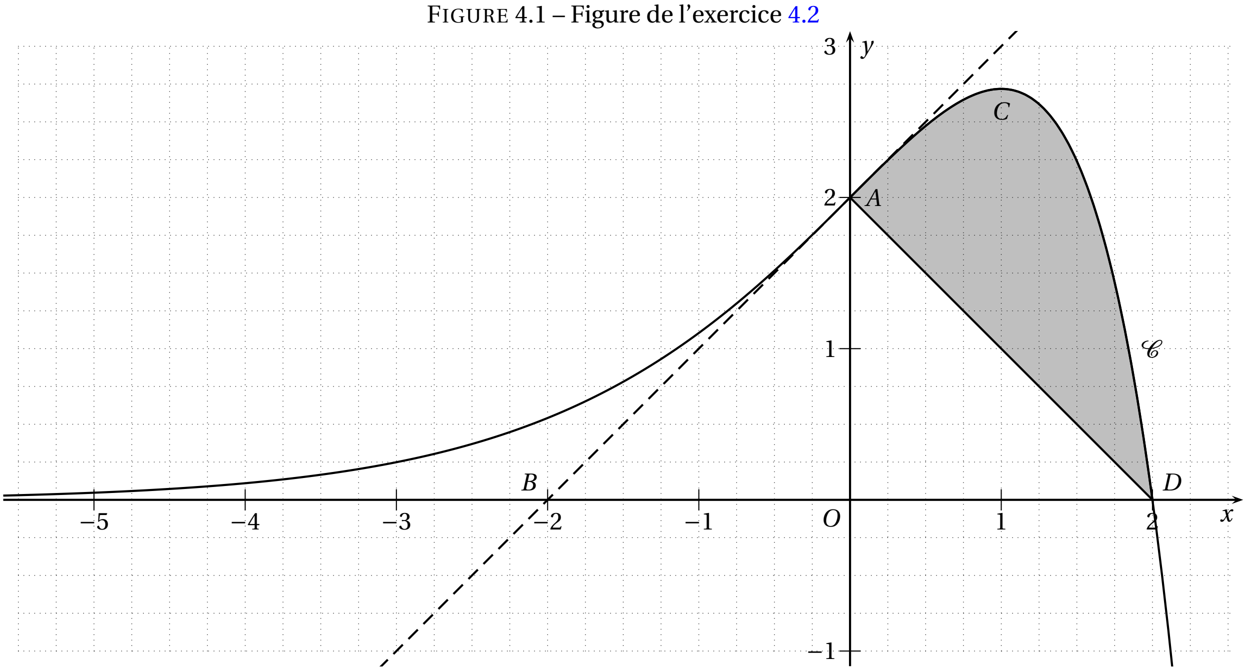
Calcul intégral

EXERCICE 4.1 (4,5 points)**.**
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3(4x-1)^3$ pour $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ pour $x \in]1\,;+\infty[$
- $h(x) = \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

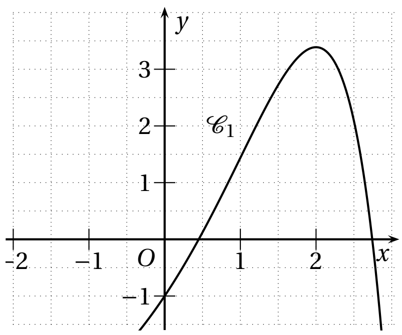
EXERCICE 4.2 (9 points)**.**
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ relativement à un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 2 cm sur l'axe des ordonnées) est donnée sur la figure 4.1 de la présente page.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;2)$ et $D(2\,;0)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A passe par le point $B(-2\,;0)$ et la tangente à la courbe en C, d'abscisse 1, est horizontale. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$.
La droite (AD) est d'équation $y = -x+2$.
Le domaine grisé $\mathscr{D}$ est délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et par la droite (AD).

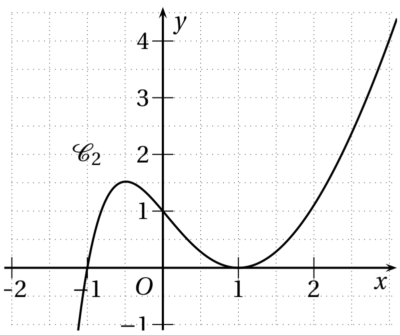
FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.2

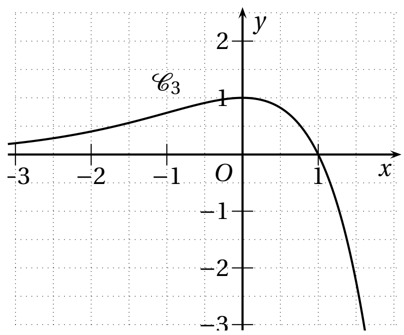


1. Avec les informations fournies par l'énoncé, déterminer, sans justifier $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. (a) Sans justifier et avec la précision permise par le graphique, résoudre :
   - $f(x) = -1$;
   - $f(x) = 1$;
   - $f(x) = 3$.

   (b) Plus généralement, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs de k.
3. L'une des trois courbes ci-dessous est celle de f', fonction dérivée de f. Déterminer laquelle en justifiant votre choix.
4. L'une des trois courbes ci-dessous est celle de F, une primitive de f.
   (a) Déterminer laquelle en justifiant votre choix.
   (b) En déduire l'aire du domaine $\mathscr{D}$, en cm^2.







EXERCICE 4.3 (6,5 points).

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[5;20]$ par $f(x) = \frac{-10x^3+250x^2-5000}{x^2}$.

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 4.2 de la présente page représente cette fonction dans un repère orthogonal.

On admettra que $f(x) = \frac{-10x^3+250x^2-5000}{x^2} = \frac{(x-5)(-10x^2+200x+1000)}{x^2} = -10x+250-\frac{5000}{x^2}$ et on pourra utiliser l'une ou autre expression de $f(x)$ dans la suite.

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[5;20]$, $f'(x) = \frac{(-10x+100)(x^2+10x+100)}{x^3}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[5;20]$.
3. (a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{-5x^3+250x^2+5000}{x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[5;20]$.

   (b) Calculer l'intégrale $\int_5^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

Une entreprise commercialise des centrales d'aspiration.

Le coût de fabrication d'une centrale est de 5 centaines d'euros.

On suppose que le nombre de centrales vendues dépend du prix de vente x d'une centrale, exprimé en centaines d'euros, et est donné par la fonction $N(x) = \frac{-10x^2+200x+1000}{x^2}$.

1. (a) Exprimer, en fonction du prix de vente x, le bénéfice obtenu par la vente d'une centrale, en centaines d'euros.

   (b) En déduire, en utilisant l'expression de $f(x)$ la plus appropriée, que la fonction f donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euros.
2. À quel prix l'entreprise doit-elle vendre une centrale pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?
3. Calculer le bénéfice moyen réalisé pour $x \in [5;20]$. Le représenter sur le graphique.

Partie C

Cette partie est un bonus, donc hors barème.

Montrer qu'on a effectivement :

1. $f(x) = \frac{(x-5)(-10x^2+200x+1000)}{x^2}$
2. $f(x) = -10x+250-\frac{5000}{x^2}$.

FIGURE 4.2 – Figure de l'exercice 4.3