Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1.1 (4 points).

La fonction f est définie sur $[-4\,;5]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si } -4 \leqslant x < 1 \\ mx+2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}_m$ sa représentation graphique.

1. Dans le repère de la figure 1.1 de la présente page tracer en bleu $\mathscr{C}_{-1}$, la représentation graphique de f pour $m = -1$.

   Voir la figure 1.1 de la présente page. (2 points)

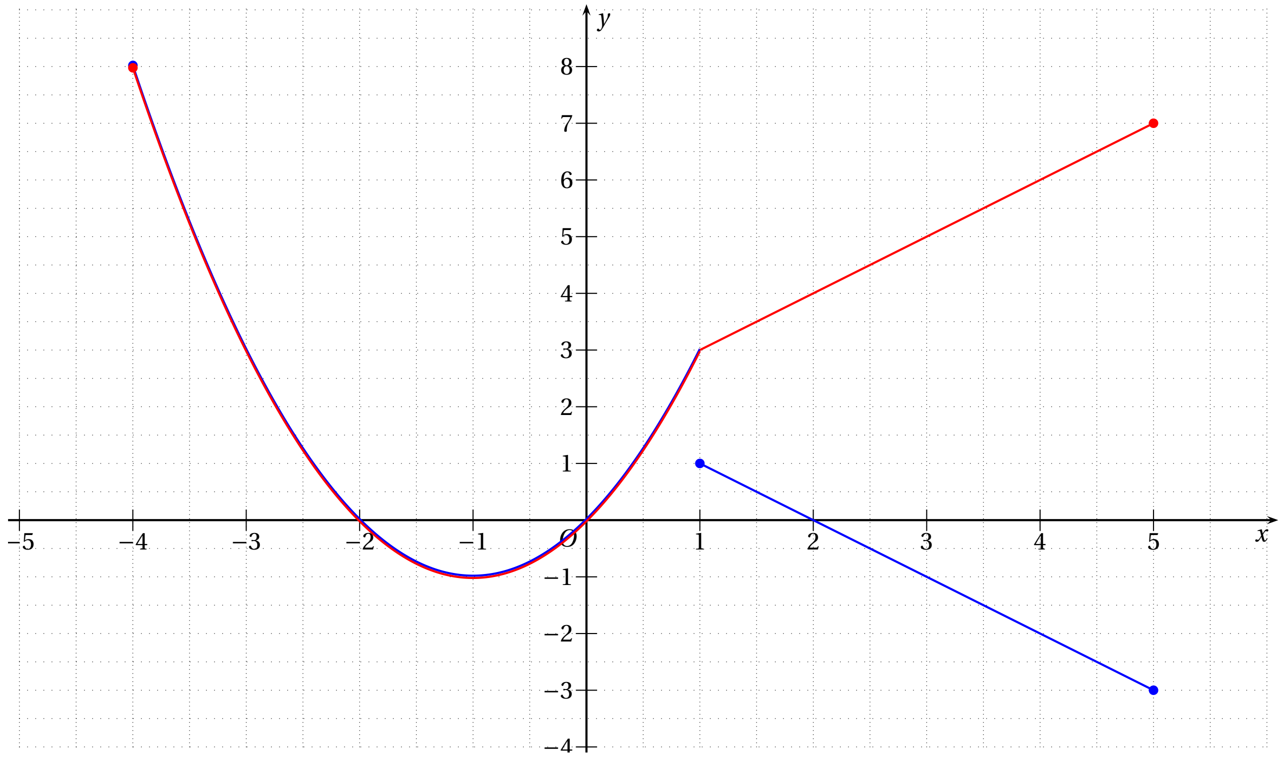
2. Donner, sans justifier, les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.

   f est continue sur $[-4\,;1[$ et sur $[1\,;5]$. (0,25 + 0,25 point)
   Remarque. $[-4\,;1[\cup[1\,;5]$ est une mauvaise réponse.

3. Déterminer m pour que f soit continue sur $[-4\,;5]$. Tracer alors sa représentation en rouge dans le même repère.

   La discontinuité est en $x = 1$. Pour que f soit continue sur $[-4\,;5]$, on doit avoir, pour $x = 1$, $x^2+2x = mx+2 \Leftrightarrow 3 = m+2 \Leftrightarrow m = 1$. (1 point)
   Voir le tracé sur la figure. (0,5 point)

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.1



Exercice 1.2 (6 points).

*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*

1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

   - Le point de la courbe d'abscisse 0, c'est-à-dire B, a pour ordonnée 4 donc $f(0) = 4$. (0,5 point)
   - $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, c'est-à-dire C. Or cette tangente est la droite (CF) dont le coefficient directeur est $m = \frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = 0{,}75$ donc $f'(1) = 0{,}75$. (0,5 point)
   - $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, c'est-à-dire 2. Or cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(2) = 0$. (0,5 point)

   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\,;5]$.

Le signe de $f'(x)$ est donné par les variations de f.

x	-2		0		2		5
On a les variations de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
On en déduit le signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(1 point)

(c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2; 5]$.

$f(x)$ est positif lorsque la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et négatif lorsqu'elle est en-dessous donc :

x	-2		4		5
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

(1 point)

2. Parmi les trois représentations graphiques 1.3 page 23, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $[-2; 5]$.
Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.

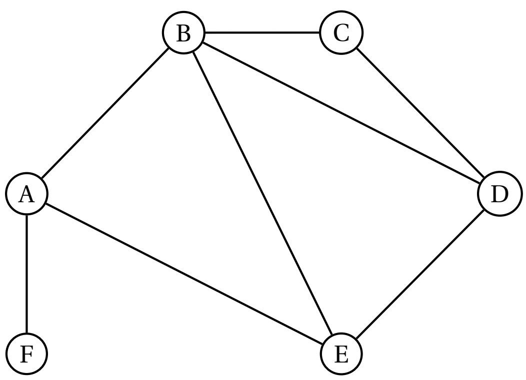
- La seule courbe pouvant représenter une fonction f' ayant les signes obtenus à la question 1c est la courbe 3 car elle est située sous l'axe des abscisses sur $[-2; 0] \cup [2; 5]$ et au-dessus sur $[0; 2]$. (1 point)
- Étant la dérivée de h, c'est le signe de $f(x)$ qui donne les variations de h :

x	-2		4		5
On a le signe de $f(x) = h'(x)$		$+$	0	$-$	
On en déduit les variations de h		$\nearrow$		$\searrow$	

La courbe de h ne peut donc être que la courbe 1. (1,5 point)

Exercice 1.2 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. La figure ci-contre propose un graphe.



(a) Citer deux sommets adjacents (*justifier brièvement*).

Deux sommets sont dis adjacents s'ils sont les extrémités d'une même arête. A et B sont donc, par exemple, adjacents. (0,25 point)

(b) Ce graphe est-il connexe (*justifier brièvement*) ?

Deux sommets quelconques du graphe peuvent être reliés par une chaîne ; le graphe est donc connexe. (0,5 point)

(c) Ce graphe contient-il un sous-graphe d'ordre 3 qui soit complet ? Et d'ordre 4 ? *Si oui le(les) citer.*

- Le sous-graphe engendré par les sommets A, B et E, par exemple, est complet et d'ordre 3. (0,5 point)
- Ce graphe ne contient aucun sous-graphe complet d'ordre 4. (0,25 point)

(d) Ce graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui le citer.*

Le sous-graphe engendré par les sommets C, E et F est stable car il ne comporte aucune arête. (0,5 point)

(e) Déterminer graphiquement la distance entre chacun des sommets (*on pourra faire un tableau*).

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	2	1	1
B	1	0	1	1	1	2
C	2	1	0	1	2	3
D	2	1	1	0	1	3
E	1	1	2	1	0	2
F	1	2	3	3	2	0

(1 point)

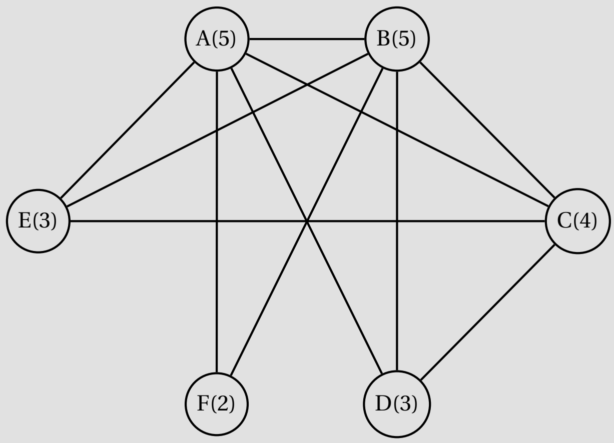
(f) Déterminer le diamètre de ce graphe.

C'est la plus grande des distances entre deux sommets du graphe ; le diamètre de ce graphe est donc 3. (0,5 point)

2. Est-il possible que dans un groupe de six personnes (*on justifiera chaque réponse*) :

(a) deux d'entre elles aient 5 amis, une d'entres elle ait 4 amis, deux d'entre elles aient 3 amis et la dernière ait 2 amis ?

On peut représenter cette situation par un graphe dont les sommets sont les personnes et les arêtes les liens d'amitié. Les sommets impairs seraient alors en nombre pair, ou bien la somme des degrés des sommets est paire, ce qui revient au même, ce qui signifie qu'un tel graphe n'est pas forcément impossible.
Il faut alors essayer :



Une telle situation est donc possible, le graphe en est la preuve. (0,5 point)

(b) quatre d'entre elles aient 3 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 1 ami ?

Avec les mêmes conventions que dans la question précédente, on obtiendrait un graphe dont la somme des degrés est impaire ou, ce qui revient au même, dont le nombre de sommets impairs est impair. Le graphe étant impossible, la situation l'est aussi. (0,25 point)

(c) quatre d'entre elles aient 2 amis, une d'entre elles 4 amis et la dernière 6 amis ?

Avec les conventions ci-dessus, les sommets impairs seraient alors en nombre pair, ou bien la somme des degrés des sommets est paire, ce qui revient au même, ce qui signifie qu'un tel graphe n'est pas forcément impossible.
Il faut alors essayer. Les essais montrent vite qu'un tel graphe simple est impossible : la dernière personne ne peut avoir 6 amis car, hormis elle-même, il n'y a que 5 autres personnes dans le groupe. (0,25 point)

3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que dans un graphe simple (sans boucle et sans arête parallèle) deux sommets ont toujours le même degré.

Considérons un graphe simple à n sommets.
Le degré maximum dans un tel graphe pour un sommet est $n-1$, un sommet pouvant au maximum être adjacent aux $n-1$ autres sommets. Le degré minimum est 0, le sommet n'étant lié à aucun autre. Les degrés possibles pour un tel graphe, pour chaque sommet, peuvent aller de 0 à $n-1$, ce qui donne n degrés différents. A priori une telle situation est possible puisque qu'il y a n sommets et une liste de n degrés possibles différents.
Mais il est impossible qu'un des sommets soit de degré $n-1$, qui serait alors il est adjacent à tous les autres, et que, en même temps, un sommet soit de degré 0, qui ne serait alors lié à aucun autre.
Finalement il n'y a que $n-1$ degrés possibles : soit $0, \dots, n-2$, soit $1, \dots, n-1$.
Or il y a n sommets donc au moins deux sont de même degré. (1,5 point)

Exercice 1.3 (3 points).

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + 2$ et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f\left(g(x)\right)$.

1. Déterminer $h(0)$, $h(1)$ et $h(-2)$.

   - $h(0) = f\left(g(0)\right) = f(2) = \frac{1}{2}$.
   - $h(1) = f\left(g(1)\right) = f(3) = \frac{1}{3}$.
   - $h(-2) = f\left(g(-2)\right) = f(6) = \frac{1}{6}$.

   $(0,5 \times 3$ point)

2. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.

   $h(x) = f\left(g(x)\right) = f(x^2+2) = \frac{1}{x^2+2}$. (0,5 point)

3. Déterminer l'expression de l définie sur $\mathbb{R}^*$ par $l(x) = g\left(f(x)\right)$. A-t-on $l = h$?

   - $l(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 = \frac{1}{x^2} + 2$ (0,5 point)
   - $h(1) = \frac{1}{3} \neq l(1) = 3$ donc $h \neq l$. (0,5 point)

Exercice 1.4 (7 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$
On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$.

   $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = x^2 - 5x + 7$ et $v(x) = x - 3$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Or $u'(x) = 2x - 5$ et $v'(x) = 1$.
   Donc $f'(x) = \frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)(1)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$. (1 point)

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   - $(x-3)^2$ est strictement positif donc $f'(x)$ sera du signe du numérateur.
   - $x^2 - 6x + 8 = ax^2 + bx + c$ est un trinôme, donc du signe de a, c'est-à-dire positif, sauf entre les racines, si elles existent.
     $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ donc deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$.

   Finalement $f'(x)$ est positif sur $]-\infty\,; 2] \cup [4\,; +\infty[$ et négatif sur $[2\,; 4]$. (1 point)

   (c) Dresser le tableau des variations de f en indiquant les extremums locaux.

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$f(2) = -1$	$\searrow$	‖	$\searrow$	$f(4) = 3$	$\nearrow$	

   (0,5 point)

2. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

   - Avec l'axe des ordonnées : c'est le point d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = -\frac{7}{3}$. (0,5 point)
   - Avec l'axe des abscisses : ce sont les points d'ordonnée $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+7}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$ et $x^2 - 5x + 7 = 0$.
     Or $\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$ donc aucun x n'est solution et la courbe n'a pas d'intersection avec l'axe des abscisses. (0,5 point)

3. Déterminer, s'il y en a :

(a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;

> Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$ donc, d'après le tableau de variations, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses 2 et 4. (0,5 point)

(b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

> $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{8}{9}x - \frac{7}{3}$. (0,5 point)

4. Dans le repère de la figure 1.2 de la présente page :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 3 ;
   (d) tracer la courbe $\mathscr{C}$

> Voir la figure. (2,5 points)

FIGURE 1.2 – Figure de l'exercice 1.4