Annexe B

Retour sur la notion de limite

Sommaire

B.1 Activités . . . . **xvii**
B.2 Limites des fonctions usuelles . . . . **xviii**
B.3 Opérations sur les limites . . . . **xix**
B.3.1 Règle essentielle xix
B.3.2 Limite d'une somme xix
B.3.3 Limite d'un produit xix
B.3.4 Limite de l'inverse xx
B.3.5 Limite d'un quotient xx
B.3.6 Cas des formes indéterminées xx
B.3.7 Fonctions polynôme et rationelle xxi
B.4 Asymptotes . . . . **xxii**
B.4.1 Asymptote verticale xxii
B.4.2 Asymptote horizontale xxii
B.4.3 Asymptote oblique xxii
B.5 Exercices . . . . **xxiii**
B.5.1 Technique xxiii
B.5.2 Lectures graphiques xxiii
B.5.3 Étude de fonctions xxiv

B.1 Activités

ACTIVITÉ B.1.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. Comment semblent se comporter ces trois fonctions quand x devient grand ?
3. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
   - $f(x) > M$ où M est un réel quelconque (qu'on peut imaginer très grand).
4. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

> On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ACTIVITÉ B.2.
Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				

(b) Comment semble se comporter cette fonction quand x devient grand ?

(c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x devient grand ?
On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

(d) Résoudre, pour $x > 0$, les inéquations suivantes :

- $f(x) - 2 < 0,1$
- $f(x) - 2 < 0,001$
- $f(x) - 2 < \epsilon$ où ϵ est un réel positif quelconque (qu'on peut imaginer très petit).

Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

> On dira que
> - la limite de f, quand x tend vers $+\infty$ est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$;
> - la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,1	1,01	1,0001
$f(x)$				

(b) Comment semble se comporter cette fonction quand x se rapproche de 1 ?

(c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x se rapproche de 1 ?
On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

(d) Résoudre, pour $x > 0$, les inéquations suivantes :

- $f(x) > 10$
- $f(x) > 1000$

Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

> On dira que
> - la limite de f, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$;
> - la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$ (forcément en 1).

B.2 Limites des fonctions usuelles

Propriété B.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	*Limites*
$f(x) = mx+p$	$\mathbb{R}$	*Si* $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = -\infty$ *Si* $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = +\infty$ *Si* $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Remarques. • Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx+p$ avec, respectivement, $m = 0$ et $p = 0$.

- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

B.3 Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

B.3.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions continues vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

B.3.2 Limite d'une somme

Propriété B.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples B.1.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x + \dfrac{1}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-x + \dfrac{1}{x} - 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x-1) = -0-1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + x - 1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

B.3.3 Limite d'un produit

Propriété B.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$l \times l'$	0	$\pm\infty$
$l = 0$	0	0	F.I.
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples B.2.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-5x^2\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-5) = -5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2+x\right)=0+0=0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

B.3.4 Limite de l'inverse

Propriété B.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0 *(0^+)*	0 *(0^-)*

On l'admettra.

Exemples B.3.

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ et $x^2>0$ quand $x\in\mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+x+2}=\dfrac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+2\right)=4$

B.3.5 Limite d'un quotient

Propriété B.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	*0*
$l=0$	*0*	*F.I.*	*0*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Exemple B.4.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{2x^2+3}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+3)=+\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\cos x}{x^2-2x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos 0=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-2x)=0$ et $x^2-2x=x(x-2)<0$ (négatif entre les racines 0 et 2)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x-1\right)=+\infty$

B.3.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$\text{« }\frac{0}{0}\text{ »}\qquad\text{« }0\times\infty\text{ »}\qquad\text{« }\frac{\infty}{\infty}\text{ »}\qquad\text{« }\infty-\infty\text{ »}$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x\to-\infty$, on peut considérer que $x\neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :
$$x^2+x-1=x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$, on a :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1+0+0=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x>0$, donc $x\neq0$, on peut écrire, en développant : $\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)=x+1$

   or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+1)=0+1=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)=1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x\to+\infty$ on peut considérer que $x\neq0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :
$$\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$, on a :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=1+0-0=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$
   or
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2=0\text{ et }x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

B.3.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété B.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\text{ avec }a_n\neq0$$
Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n=\pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n=\pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété B.7. *Soit f une fonction rationelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

B.4 Asymptotes

Définition B.1. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

B.4.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition B.2. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty \text{ ou} \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \infty \end{array}\right. \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

B.4.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition B.3. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

B.4.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition B.4. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (mx+p)\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = mx + p \text{ asymptote à} \\ \mathscr{C} \text{ en l'infini} \end{array}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

B.5 Exercices

B.5.1 Technique

EXERCICE B.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$

EXERCICE B.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

EXERCICE B.3.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

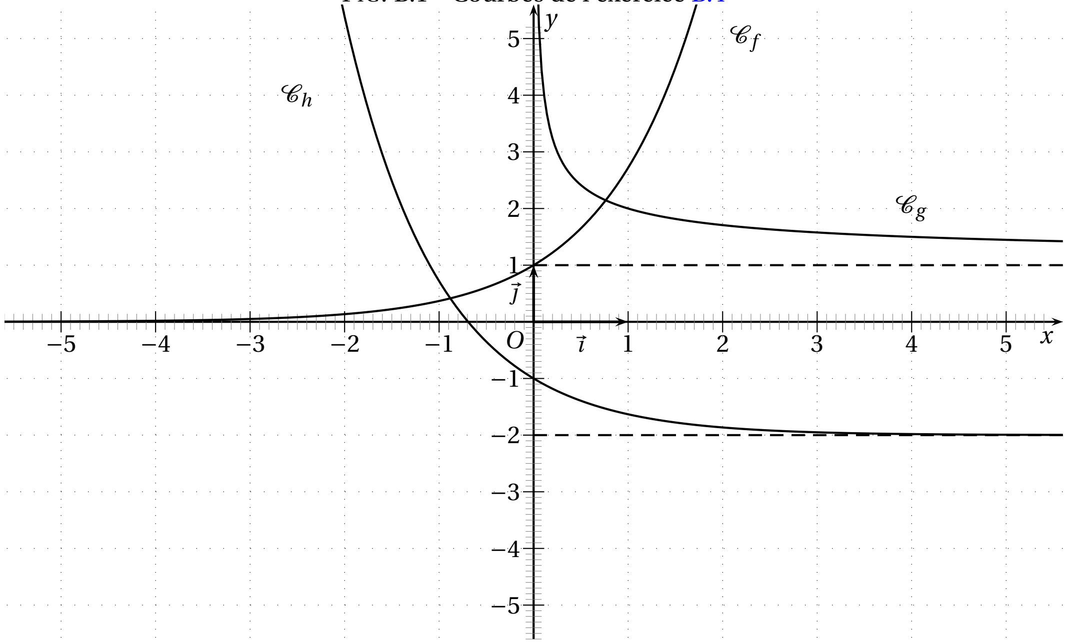
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

B.5.2 Lectures graphiques

EXERCICE B.4.
On donne sur la figure B.1 de la présente page les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.
Pour chacune des trois fonctions :

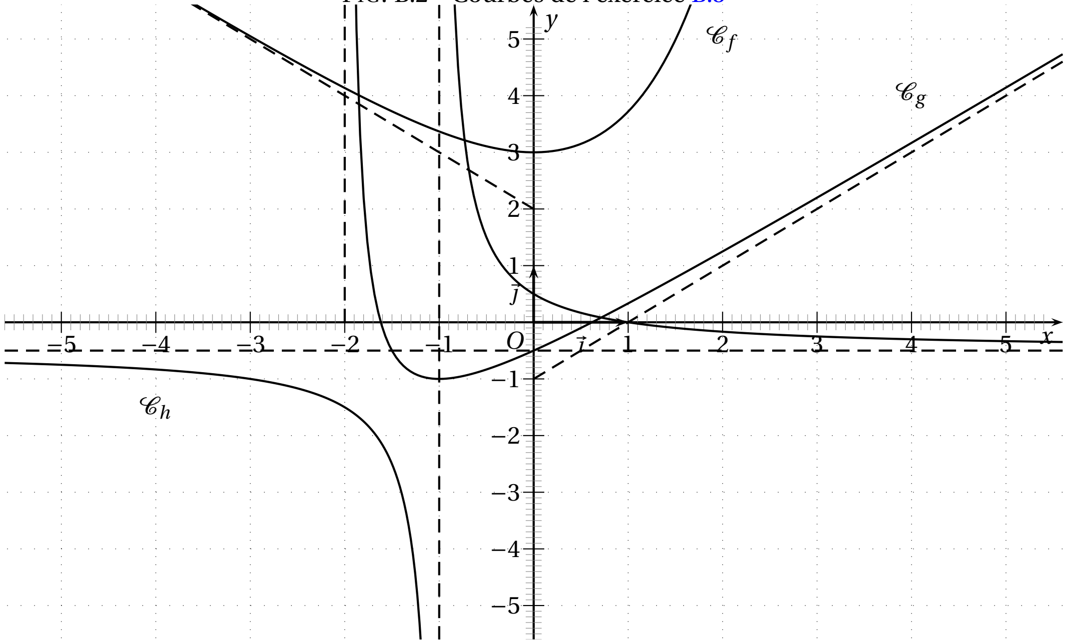
1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.

FIG. B.1 – Courbes de l'exercice B.4



EXERCICE B.5.
Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties), à partir de la figure B.2 page xxiv.

FIG. B.2 – Courbes de l'exercice B.5



B.5.3 Étude de fonctions

EXERCICE B.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE B.7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est bornée par 0 et 2.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

EXERCICE B.8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

EXERCICE B.9.
Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{3-x}$$

3. Étude en l'infini.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   (b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = -x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Étude au voisinage de 3.
   (a) Déterminer la limite du numérateur lorsque x tend vers 3.
   (b) Étudier le signe du dénominateur.
   (c) Déterminer la limite du dénominateur lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures.
   (d) En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$.
   (e) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)$
   (f) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

EXERCICE B.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax+b+\frac{cx}{x^2+1}$$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE B.11.
Soit f la fonction qui a x associe

$$f(x) = \frac{1-2x}{-x^2+2x+3}$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On commencera par étudier le signe de $-x^2+2x+3$ *selon les valeurs de* x.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

EXERCICE B.12.
Soit f la fonction définie pour $x \in [1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A}-\sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
4. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$