Devoir surveillé n°8

Statistiques – Probabilités – Fonction exponentielle

Exercice 8.1 (6 points).

On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de cette série statistique de la proportion en fonction de l'année.

1. (a) Construire le nuage de points de coordonnées $(a_i\,;\,y_i)$ dans le plan muni du repère orthogonal suivant
   - sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité $0,5$ cm,
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité $0,5$ cm.

   (b) Un ajustement affine semble-t-il adapté ?
2. On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

   (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

   On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

   (b) Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

   (c) En déduire la relation : $y = 61,3\ln x - 197$.

   (d) Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir en 2010 en utilisant cet ajustement ?

   (e) À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera-t-elle supérieure à 60 % ?

Exercice 8.2 (8 points).

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ de la figure 8.1 page 131 représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\,;\,-2)$ passe par le point $B(2\,;\,-4)$.

On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. (a) Donner la valeur de $f(0)$.

   (b) Justifier que : $f'(0) = -1$.
2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx}$.

   (a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = (bx + ab + 1)\mathrm{e}^{bx}$.

   (b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x}$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).
   Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. (a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (c) Préciser le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   Déterminer la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
   Donner le résultat sous forme décimale, arrondi au dixième.

Exercice 8.3 (6 points).

Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. Si, lorsqu'il parvient à leur niveau, le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête.

On note :

- A_1 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au premier feu ».
- A_2 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».

On note $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ les évènements contraires des évènements A_1 et A_2.

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\frac{1}{6}$, la probabilité qu'il soit rouge est $\frac{1}{3}$.
   (a) Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ?
2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\frac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\frac{1}{3}$.
   (a) Illustrer cette situation par un arbre pondéré.
   (b) Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\frac{1}{3}$.
   (c) Calculer $P(A_1 \cap A_2)$ et $P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$; en déduire $P(A_2)$.
   (d) L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ?
3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet.
   (b) Déterminer la durée moyenne du trajet.

Exercice 8.3 (6 points).

Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne :

- par x la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heure ; x appartient à l'intervalle $]0\,;\,10]$
- par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0\,;\,12]$.

La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f(x, y) = \frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0 < x \leqslant 10 \text{ et } 0 < y \leqslant 12.$$

La figure 8.2 page suivante représente la surface $(\mathscr{S})$ d'équation : $z = f(x;y)$ pour $0 < x \leqslant 10$ et $0 < y \leqslant 12$.

Partie 1

Le point A représenté par une croix est un point de la surface $(\mathscr{S})$.

1. Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).
2. Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

Partie 2

Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.

L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x + y = 36$.

La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par $g(x) = \dfrac{4x^2 - 36x}{x - 12}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
2. (a) En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.
   (b) Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

FIGURE 8.1 – Figure de l'exercice 8.2

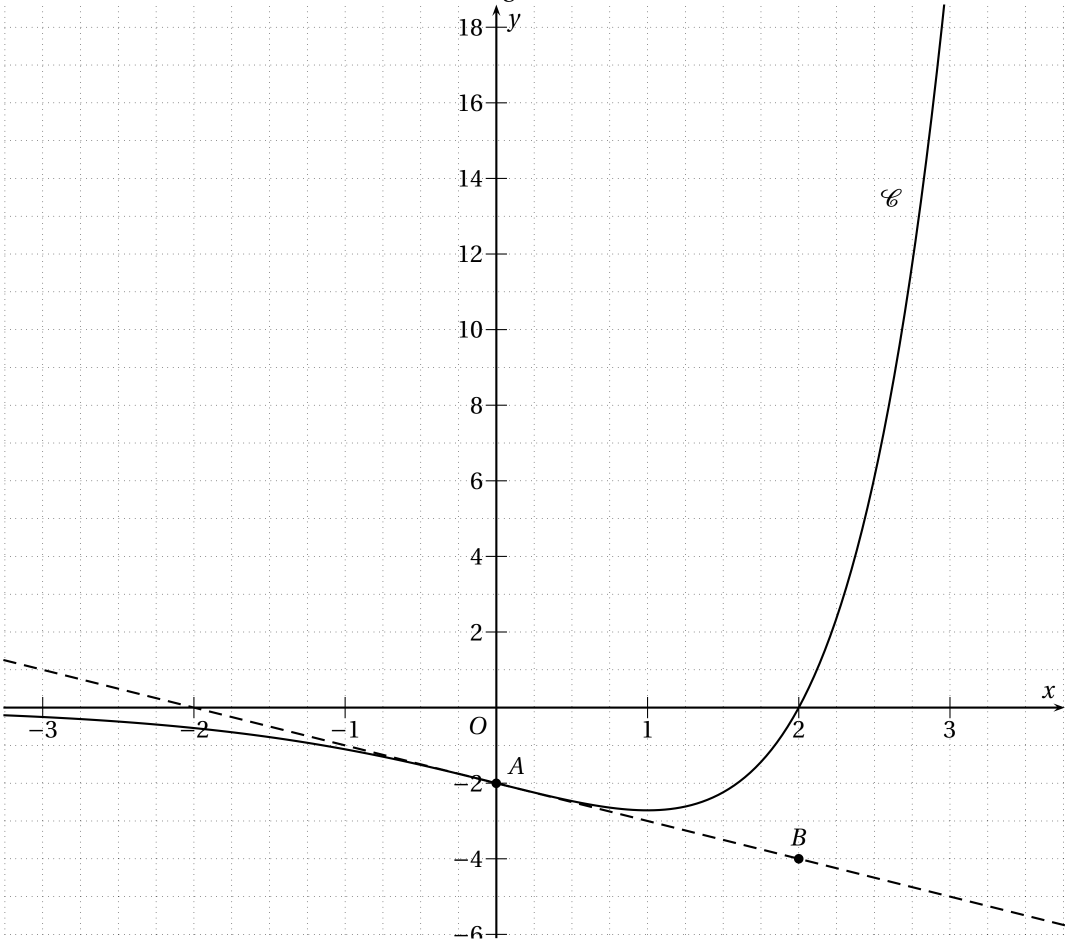

FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.3