Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Dérivation – Graphes

Les figures sont données en annexe. Le barème n'est qu'indicatif.

Exercice 1.1 (9 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.
On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Montrer que, pour tout $x\neq 1$, $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x\neq 1$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau de variations de f en indiquant les extremums locaux.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Dans le repère de la figure 1.2 page 25 :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 4 ;
   (d) tracer la courbe $\mathscr{C}$

Exercice 1.2 (5 points).

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.5 page 27 est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $I=]-\infty;2[$. On note f' sa fonction dérivée.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{3}{4}$ et l'axe des ordonnées au point $B(0;-1)$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptotes les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y=-1$ et $x=2$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(-2;-2)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est (BD).
A l'aide de ces informations et en précisant les arguments graphiques répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(-2)$, $f(0)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.
3. Résoudre l'inéquation $f'(x)\leqslant 0$.
4. On pose $g(x)=\frac{1}{x}$ pour $x\neq 0$ et $h(x)=g\big(f(x)\big)$.
   (a) Pour quelle(s) valeur(s) de x, $h(x)$ n'est-il pas défini ? Justifier.
   (b) Déterminer $h(-2)$ et $h(0)$.

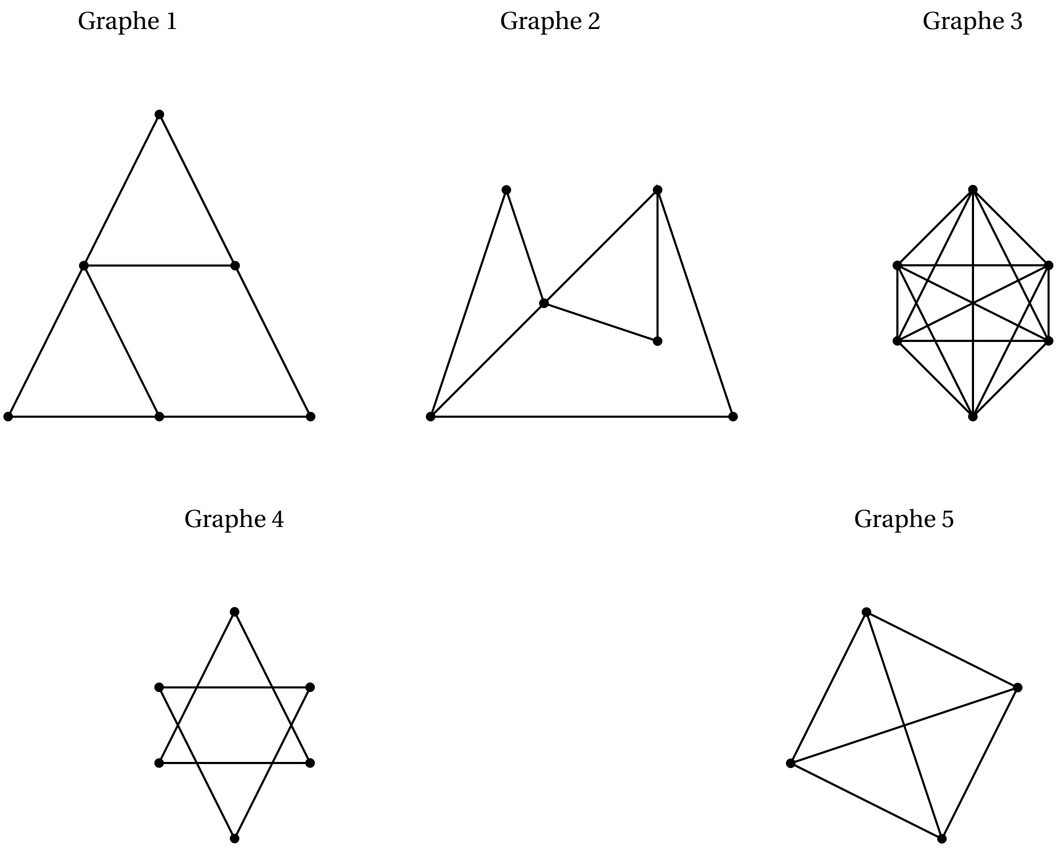
Exercice 1.3 (4 points).

Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
On considère la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée sur la figure 1.3 page 26.
L'une des courbes de la figure 1.4 page 26 est la courbe représentative de f', la fonction dérivée de f, une autre est la courbe représentative d'une fonction g telle que $g'=f$.
Déterminer quelles courbes peuvent convenir pour f' et pour g.
On justifiera ses réponses par des arguments graphiques.

Exercice 1.4 (4 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

1. La figure 1.1 de la présente page propose cinq graphes.

FIGURE 1.1 – Graphes de l'exercice 1.4



   (a) Déterminer ceux qui sont suceptibles de décrire une même situation en justifiant.
   (b) Indiquer ceux qui sont complets en justifiant.
   (c) Indiquer ceux qui sont connexes en justifiant et, pour ces graphes connexes, indiquer leur diamètre sans justifier.

2. Dans un groupe de six enfants est-il possible que :
   (a) cinq d'entre eux aient exactement 3 amis et le dernier exactement 2 amis (justifier) ?
   (b) l'un d'eux ait exactement 4 amis, un autre ait exactement 3 amis, trois autres aient exactement 2 amis et le dernier exactement 1 ami (justifier) ?
   (c) l'un d'eux ait exactement 6 amis, deux autres aient exactement 3 amis, un autre ait exactement 2 amis et les deux derniers exactement 1 ami (justifier) ?

Exercice 1.5 (2 points).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < 1 \\ mx + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ On appelle $\mathscr{C}_m$ sa représentation graphique.

1. Dans le repère de la figure 1.6 page 27 tracer en bleu $\mathscr{C}_1$ et en vert $\mathscr{C}_{-2}$ (c'est-à-dire les représentations de f pour $m = 1$ et $m = -2$).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.
3. *Question bonus (à ne traiter qu'une fois tout le reste terminé)* : Déterminer m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer alors sa représentation en rouge.

Annexes

FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.1

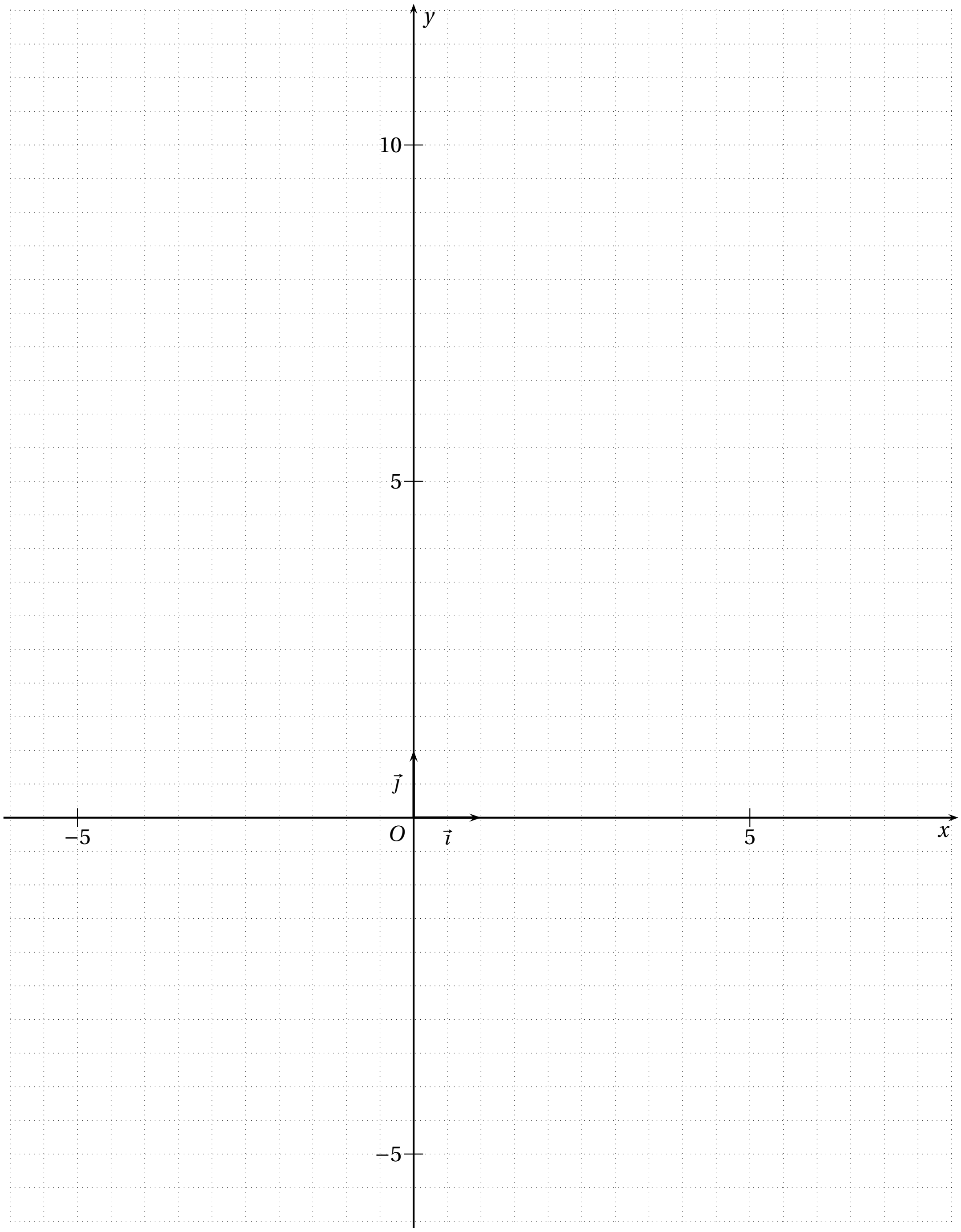


FIGURE 1.3 – Courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice 1.3

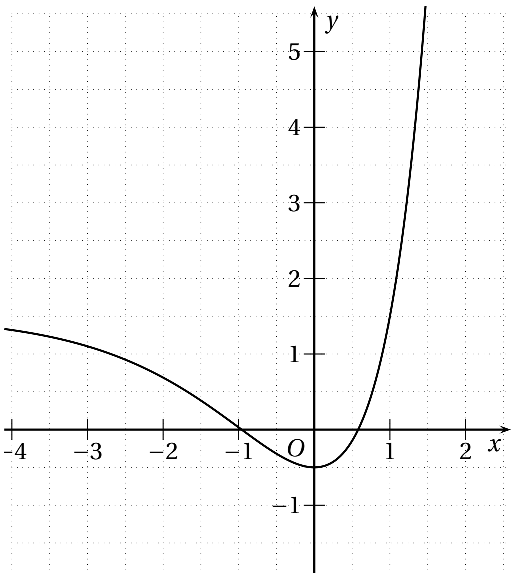


FIGURE 1.4 – Les trois courbes possibles de l'exercice 1.3

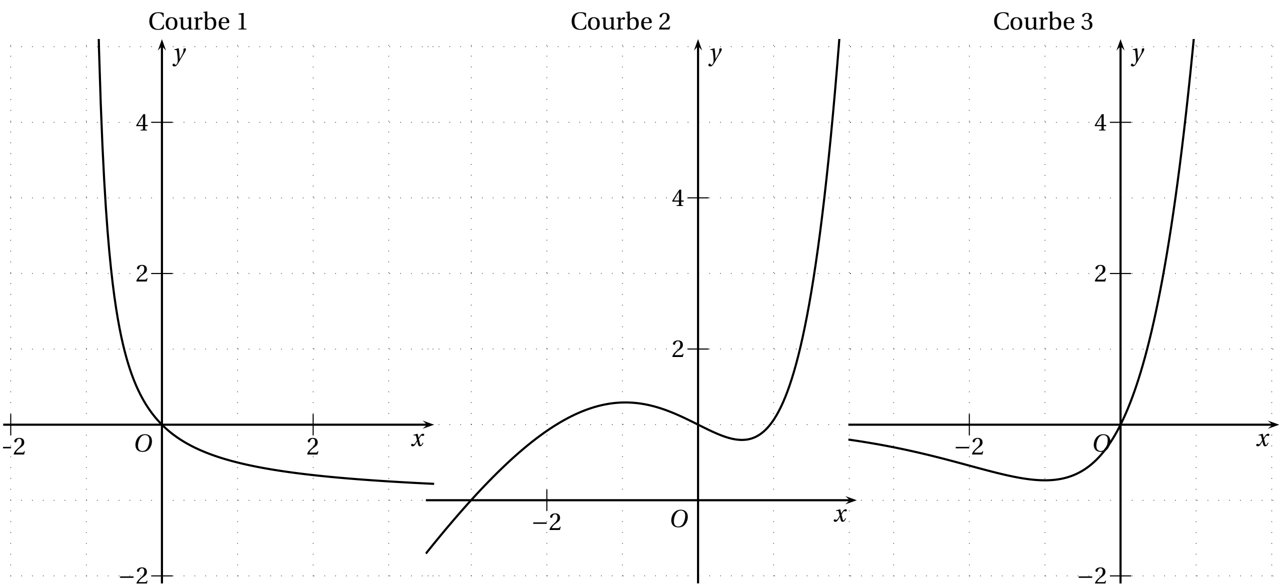


FIGURE 1.5 – Figure de l'exercice 1.2

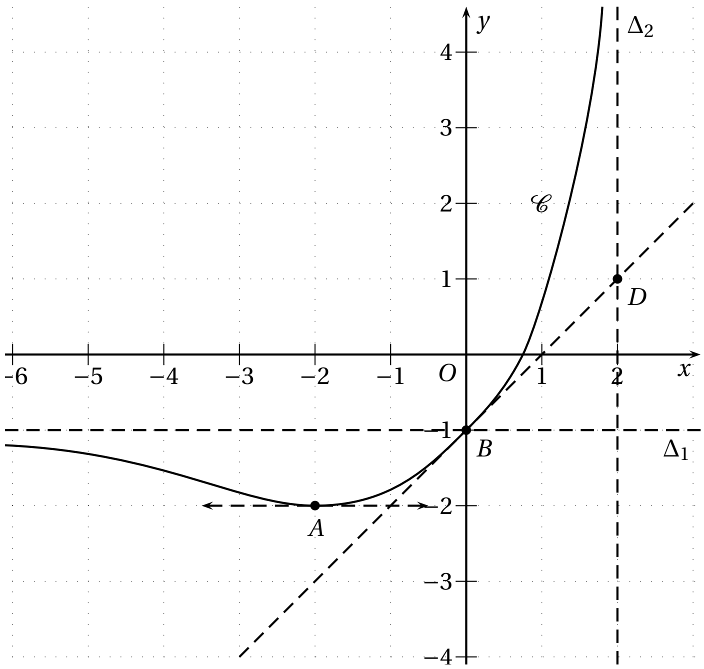


FIGURE 1.6 – Repère de l'exercice 1.5